PRINCIPIO DE RELATIVIDAD

SUS FUNDAMENTOS EXPERIMENTALES Y FILOSÓFICOS Y SU EVOLUCIÓN HISTÓRICA

POR

BLAS CABRERA



PUBLICACIONES DE LA RESIDENCIA DE ESTUDIANTES

SERIE I VOL. 7

PRINCIPIO DE RELATIVIDAD



PRINCIPIO DE RELATIVIDAD

SUS FUNDAMENTOS EXPERIMENTALES Y FILOSÓFICOS Y SU EVOLUCIÓN HISTÓRICA

POR

BLAS CABRERA



PUBLICACIONES DE LA RESIDENCIA DE ESTUDIANTES

SERIE I.—VOL. 7

MADRID

1923



Imprenta Clasica Española, Glorieta de la Iglesia. Madrid.



PRÓLOGO





ESTE libro recoge el contenido esencial de varias Conferencias dadas por el autor en el Ateneo de Madrid, la Sociedad Científica Argentina, la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Córdoba (República Argentina), y, por último, en forma casi idéntica al contenido de las siguientes páginas, en la Facultad de Ciencias, de Madrid. Perseguía en todas ellas probar que no existe nada en las Ciencias positivas que esté en oposición con el principio de relatividad, tanto en su forma restringida como en la general; y bastante que obliga a convertirle en postulado necesario de la Filosofía natural. El origen del recelo que todos hemos sentido al primer contacto con la Ciencia que este principio ha creado, y que algunos conservan a pesar de los esfuerzos dedicados por muchos hombres de ciencia a combatir tal estado de espíritu, estriba en confundir con imposiciones de la razón, o también con verdades adquiridas por la observación y la experiencia, nociones elaboradas por nuestra mente partiendo de postulados que las más de las veces han penetrado subrepticiamente en la Ciencia.

No es nuevo el hecho, siquiera nunca haya sido de resonancia comparable. Los primeros pasos de toda nueva teoría provocan siempre



resistencia equivalente de parte de quienes han formado su espíritu bajo la tutela de las ideas que se pretende derrocar. Es el resultado de una ley general del conocimiento que bien puede llamarse de *inercia intelectual,* pues expresa la tendencia a conservar el sentido de su evolución, a la manera como la inercia de la materia se manifiesta por la persistencia en la dirección y celeridad del movimiento de los cuerpos.

Cuantos poseen ya un poco de experiencia de estudio de las Ciencias naturales, podrán, seguramente, recordar en la historia de su pensamiento con cuánto despego hemos acogido inicialmente teorías nuevas que más tarde se nos han impuesto.

Y lo que ocurre en nuestro mundo interior, es también exacto para la vida colectiva. Basta pasar rápida revista a la historia de las teorías que hoy consideramos indiscutibles: las mismas que esgrimimos contra las nuevas ideas, para caer en la cuenta de que no parecieron tan evidentes a los contemporáneos de su nacimiento. La propia interpretación dada por Newton a los fenómenos gravitatorios, que consideran incuestionable los defensores de la Ciencia clásica, fué en los días del sabio inglés motivo de no pocas discusiones, cuyos ecos se fueron debilitando lentamente mientras la referida teoría se enseñoreaba del mundo científico, hasta olvidar la prudente actitud de su autor respecto del valor filosófico de la atracción universal, que consideró simple medio de imitar los fenómenos que la Naturaleza ofrece, en tanto sus discípu-

los inmediatos, y la mayoría de los hombres de ciencia del pasado siglo, la confundieron con la realidad misma.

En aquella época, como ahora, autoridades indiscutibles del saber, como el propio Huyghens, y aun más tarde Juan Bernoulli, rechazaron de plano aquella atracción, al menos como principio fundamental; y es interesante notar que la base de toda la argumentación es la repugnancia hacia las acciones a distancia, que también ha sido instigadora del pensamiento de Einstein en la investigación que le condujo a su teoría de la gravitación. Precisamente su mayor mérito estriba en lograr la plena satisfacción de esta necesidad del espíritu sin renunciar a ninguna de las conquistas que la obra de Newton y sus continuadores ha proporcionado a la Filosofía natural.

Cierto que ha sido necesario el cruento sacrificio de ideas que se estimaban verdades axiomáticas; pero un análisis minucioso de cada una de ellas, lleva al ánimo el convencimiento de que se trata de construcciones gratuitas de nuestra mente por extrapolación indebida de ciertos resultados experimentales. Sin embargo, abundan los casos en que la firmeza de aquellas ideas es bastante para nublar el referido análisis. Es necesario entonces acudir a la imposición de los hechos que por su compatibilidad con una sola de las teorías contrapuestas sirven de *experimentum crucis* para resolver entre ellas.

Este papel lo llenan las tres consecuencias

comprobables por la observación que Einstein ha deducido de su teoría, por no referirnos más que a la Ciencia del principio generalizado en que hoy se concentra toda la oposición, pues el restringido que halló al nacer análogas dificultades, ha tiempo que ha conquistado el asentimiento general. El movimiento del perihelio de la órbita de Mercurio, la desviación de la luz en su paso por las proximidades del Sol y el corrimiento hacia el rojo de las rayas espectrales que proceden de los cuerpos incandescentes situados en campos gravitatorios más intensos que el de la superficie de nuestro planeta, son fenómenos previstos cuantitativamente por Einstein y confirmados por la observación anterior o posterior a ella, sin que tales resultados hayan intervenido en ningún momento de su desarrollo para fijar constantes indeterminadas que figurasen en sus ecuaciones, circunstancia en todo tiempo considerada como argumento de máximo valor en pro de una teoría científica.

No obstante estos éxitos, la inercia intelectual, como es lógico, sigue resistiendo y adopta una de estas dos actitudes: o diseca cuidadosamente los resultados de la observación buscando posibles causas de error que debiliten la convicción que de ellos pueda desprenderse, o busca afanosamente concepciones teóricas que conduzcan a las mismas consecuencias sin romper tan marcadamente con las ideas clásicas.

Para ser más concreto en el examen de estas dos tendencias, me referiré al interesante trabajo del astrónomo francés E. Esclangon, titu-

lado *Les preuves astronomiques de la relativité*, y a la Memoria de P. Painlevé, *La théorie clasique et la théorie einsteinniene de la gravitation*. En la primera se hace un detallado estudio del valor de cada una de las coincidencias entre la teoría y la observación a que antes he aludido, y se concluye que en todas ellas, y sobre todo en los casos del movimiento de Mercurio y de la desviación de la luz, los errores posibles en el cálculo de las observaciones afectan en tal proporción a los resultados, que está justificado el considerar fortuito el acuerdo. Esta objeción sería de gran fuerza si no se tratase de tres fenómenos absolutamente independientes, y además los únicos que han podido preverse. Al mismo estado de espíritu responde el esperar al resultado de nuevas observaciones para declarar la victoria del pensamiento de Einstein; en particular, es frecuente la afirmación de que el eclipse recientemente observado en el hemisferio Sur puede ser decisivo. Es innegable la posibilidad de que el éxito sea de tal modo claro, que contribuya a disminuir la resistencia de ciertos espíritus; pero lo más probable es que la opinión científica continúe su evolución lenta en el sentido de las nuevas ideas. Los que mayor repugnancia sienten hacia ella, encontrarán en las diferencias entre los resultados de los distintos observadores suficiente motivo para seguir dudando, mientras los ya convencidos no sentirán debilitada su fe ante resultados menos concordantes que los obtenidos en el eclipse de 1919. Lejos de mi ánimo negar



importancia a las observaciones que hayan podido realizarse en el último eclipse o se logren en los futuros, pues acaso permitan nuevos avances a nuestro conocimiento o contribuyan al perfeccionamiento de algunos aspectos parciales de la teoría. Sólo he querido afirmar que lo más esencial de ella se encuentra suficientemente consolidado por la lógica acabada de su construcción y porque ha permitido la interpretación de varios hechos de experiencia que escapaban a las teorías clásicas, sin perder una sola de las conquistas que ellas lograron.

Viniendo ya a la segunda de las actitudes arriba señaladas, Painlevé formula una serie de postulados que conservan la geometría de Euclides para el espacio, de los cuales deriva una teoría que él llama *semieinsteinniana*, cuyas previsiones astronómicas sólo difieren de las deducidas por Einstein en cantidades que se hallan más allá de los medios actuales de observación. En ella se conserva la idea del tiempo absoluto, y, por tanto, se prescinde de las modificaciones que en la Mecánica introdujo la relatividad restringida; pero es el caso que esta última cuenta ya en su haber con el apoyo de resultados experimentales de tal importancia, que ningún físico puede dudar de su exactitud.

Es clara la analogía de esta actitud con la de aquellos que, reconociendo el progreso que las ideas de Einstein representan para el conocimiento de la realidad externa, se preguntan por el valor lógico de la construcción elaborada como interpretación de la realidad. Me limitaré

a citar aquí el trabajo reciente de Zaremba: *La théorie de la Relativité et les faits observés,* pues un análisis de este interesante aspecto del problema me llevaría demasiado lejos.

Vuelvo a repetir que la finalidad que he perseguido, tanto en las conferencias y cursos arriba recordados como en la publicación de este libro, es llevar al ánimo de mis oyentes y lectores la convicción de que las alteraciones impuestas por el principio de relatividad en los conceptos fundamentales de la Filosofía natural están impuestas por la observación y la experiencia, y vienen a depurar nuestro conocimiento positivo de ciertos postulados que subrepticiamente se introdujeron en él.

Conviene a esta finalidad un modo de exposición que no es el de un libro didáctico, pues he debido sacrificar el detalle del razonamiento a la rápida visión de las dificultades de la Ciencia clásica y su fácil eliminación por las nuevas ideas. Muy especialmente quiero precaver al lector contra el deseo de seguir al detalle los cálculos que en este libro se esbozan. En las múltiples fórmulas que encontrará en sus páginas, ha de ver cosas, objetos, creaciones del espíritu, destinados a contener de la manera más acabada y más concisa la descripción esquemática de la Naturaleza; pero no aspire a averiguar el cómo y el porqué de dichas fórmulas con el solo auxilio de lo que en este libro se dice. Precisamente creemos que la fuente más copiosa de las dificultades con que la nueva Ciencia ha venido luchando, es la necesidad de



utilizar para su desarrollo métodos de razonamiento matemático que hasta ella fueron del dominio exclusivo de un grupo muy limitado de especialistas, y para cuyo uso adecuado faltaba aquel hábito que es indispensable para el empleo de todo instrumento.

Repito que no ha sido mi objeto una exposición didáctica, sino inspirar la fe en las nuevas ideas y despertar el deseo de su más perfecto conocimiento, para el cual se dispone hoy de una excelente literatura, de entre la cual señalo al lector, en la Bibliografía que va al final de este libro, las obras más interesantes, agrupadas y hasta ordenadas del modo que estimo más adecuado para un estudio completo de la nueva teoría, que si de momento parece de escasa trascendencia para la Ciencia que más directamente procura la resolución de los problemas concernientes a nuestra vida material, la tiene incalculable para la Filosofía natural, puesto que supone una revolución profunda de nuestra concepción del Universo.



CAPÍTULO PRIMERO

La relatividad en la Mecánica de Newton

1. Principios restringido y generalizado de relatividad. 2. La invariación de las leyes naturales.—3. Los postulados de Newton para la Mecánica del punto.—4. La noción de fuerza.—5. Principios fundamentales de la Dinámica de los sistemas.—6. Principio de relatividad de Galileo: grupo correspondiente de transformación. 7. La rigidez de los cuerpos y la experiencia.—8. Noción de simultaneidad.

1. La honda emoción que en el mundo científico, y aun entre los meros curiosos de la Naturaleza, provocó el resultado positivo logrado por Eddington y Crommelin en los trabajos realizados, durante el eclipse total de Sol de 29 de mayo de 1919, para comprobar la desviación de los rayos luminosos al pasar por las proximidades del Sol, prevista por Einstein, partiendo del principio general de relatividad por él formulado, se justifica plenamente teniendo en cuenta la profunda revolución que supone en los métodos de razonar habituales en los hombres de ciencia.



Porque es de ellos bien característico el acudir a resolver los problemas planteados por un conflicto entre la experiencia y las teorías consagradas, o por la simple impotencia de estas últimas para explicar nuevos hechos, mediante retoques y enmiendas que alteren lo menos posible su contenido fundamental. Fué así como procedió Lorentz cuando, en presencia de nuestra incapacidad para reconocer el movimiento absoluto, buscó la explicación en un acortamiento de todos los cuerpos proporcionalmente a su longitud, en la dirección del movimiento, y en la introducción de un tiempo aparente local como único dato directo de nuestros relojes.

En cambio, Einstein, espíritu profundamente filosófico, en presencia del mismo problema, analiza los postulados más fundamentales de la ciencia y busca la solución del conflicto en la reconstrucción completa de la Filosofía natural, partiendo de la independencia declarada de las leyes naturales respecto del observador que las conoce. A este resultado llegó Einstein mediante un proceso histórico en que pueden señalarse dos etapas.

Primera etapa: Identidad de las leyes naturales para observadores cuyos movimientos relativos son traslaciones rectilíneas y uniformes. De aquí se deriva la incapacidad en que cualquiera de ellos se encuentra para conocer su movimiento mediante observaciones realizadas dentro del propio sistema de que



forma parte. Nosotros vamos arrastrados por el Sol hacia un punto fijo de la bóveda celeste con un movimiento que es uniforme, dentro de los errores de observación actuales, y cuya velocidad se eleva a unos 19 kilómetros por segundo; por experimentos y observaciones en que sólo intervengan cuerpos pertenecientes al sistema planetario, es imposible reconocer este movimiento; sólo interviniendo cuerpos celestes independientes de él, es dado abordar su estudio. El postulado, circunscrito de este modo a la imposibilidad de reconocer el movimiento uniforme, ha sido designado como *principio restringido de relatividad*.

Segunda etapa: Partiendo de aquél se pudieron resolver los problemas planteados por la experiencia, a que antes aludía; pero a un espíritu filosófico había de chocarle la situación privilegiada de la traslación uniforme, y ante la posibilidad de denunciar cualquiera otra clase de movimiento, que permite la ciencia fundada en el postulado aludido, Einstein afirma que tal posibilidad es sólo aparente, formulando el *principio de relatividad general* que lleva a la independencia completa de las leyes naturales respecto de quien sea el observador que las estudia.

Aun se debe a Weyl una tercera ampliación del principio, eliminando de la teoría la hipótesis de que es posible elegir un sistema de unidades con validez

para todos los lugares del Universo y los momentos de su historia.

2. Conviene fijar el sentido de la independencia a que me refería poco más arriba. Los fenómenos del mundo físico se producen en un lugar del espacio y transcurren en el tiempo. Para precisar aquel lugar se pueden emplear varios procedimientos, de los cuales es el siguiente el más sencillo:

Por un punto O arbitrariamente elegido, tracemos tres rectas X_1, X_2, X_3 mutuamente perpendiculares e indefinidas. Tres planos que pasen por el punto P del espacio, y que sean paralelos a los X_2 X_3, X_3 X_1, X_1 X_2, determinan en aquellas rectas los segmentos Ox_1, Ox_2, Ox_3 que fijan unívocamente la posición de P, y les representaré en adelante sólo mediante x_1, x_2, x_3. Estos segmentos se llaman las coordenadas de P respecto del sistema O de rectas elegido.

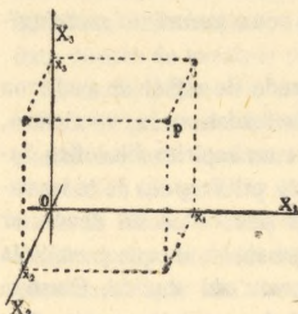


Fig. 1

También será necesario asignar a cada momento un número *t*, que fije su situación en el transcurso de los tiempos, y a este fin es indispensable elegir un reloj, que se reduce en último análisis a un fenó-



meno cuyas apariencias distintas y fácilmente reconoscibles permitan sin gran dificultad señalar los momentos sucesivos: tal es, por ejemplo, el movimiento oscilatorio de un péndulo.

En las expresiones que representan las diferentes leyes físicas figuran estas coordenadas y el tiempo, puesto que en definitiva son correlaciones de fenómenos que se producen en lugares del espacio y con un cierto orden de sucesión en el tiempo. Pero es el caso que, tanto el sistema O, al cual se refieren x_1, x_2, x_3, como el reloj que marca el tiempo t, pueden elegirse con una amplia libertad; de modo que parece como si las leyes naturales hubieran de variar con el sistema de referencia y el reloj utilizados al formularlas. *A priori* nadie se avendría a semejante conclusión: las leyes que rigen la Naturaleza no pueden tener un carácter tan circunstancial. Aunque en su expresión figuren x_1, x_2, x_3 y t, deben hallarse ligadas de modo que al cambiar de sistema o de reloj no se produzca alteración. Empleando un lenguaje más técnico, podemos decir que aquellas expresiones han de ser *invariantes para toda transformación de coordenadas o cambio de reloj*.

Cuando más arriba me he referido al observador que conoce las indicadas leyes, he querido designar con este nombre al conjunto del sistema O y los relojes que le sean propios. Así, aparece con plena cla-



ridad el sentido que ha de atribuirse a la independencia de las leyes naturales, y no habrá riesgo de confundirla con una identidad de aspectos de la Naturaleza contemplada desde los diversos puntos de vista que son característicos de cada observador.

El caso más sencillo que puede presentarse al aplicar el principio de relatividad, es aquel en que todos los observadores se conservan indefinidamente en la misma posición los unos respecto de los otros y contemplan una Naturaleza estática en que la consideración del tiempo carece de sentido. Entonces aquel principio queda reducido a la conocida identidad de las propiedades geométricas, sea cual fuere el camino por el cual se llegue a su descubrimiento. Y aquí puede verse un claro ejemplo de la diferencia que señalaba más arriba entre la identidad de las leyes y la que pudiera atribuirse equivocadamente a los aspectos de la Naturaleza; las ecuaciones que definen una esfera y una tangente, o un diámetro de la misma, cambian de forma según se hallen referidas a ejes coordenados cuyo origen coincide con el centro de aquélla o se halle en cualquier otro punto; pero las relaciones que existen entre dichas rectas y la superficie, gracias a las cuales poseen el carácter de tangente y diámetro, son independientes de dicho sistema. Aquellas ecuaciones representan los *aspectos* geométricos, y estas relaciones son *leyes naturales* para los entes en cuestión.



Esta misma evidencia del principio que nos ocupa se traslada al caso un poco más complejo en que los observadores se hallen en reposo relativo, pero no contemplan una Naturaleza estática, sin más que admitir la posibilidad de reglar sus relojes en forma que asegure el sincronismo. Tan grande es esta evidencia, que, no obstante ser premisa indispensable de la ciencia, no se ha creído necesario enunciar el principio como uno de sus postulados.

Pero cuando, después de construído el edificio científico que corresponde a la hipótesis de observadores en reposo relativo, ha sido necesario eliminar esta condición y considerar el caso en que aquéllos se hallen en movimiento los unos respecto de los otros, ha surgido la dificultad, teniendo que escoger entre la total transformación de la ciencia construída o la renuncia de aquel principio. Ante este dilema, los hombres que habían colaborado en aquella obra prefirieron abandonar el repetido principio, de naturaleza estrictamente filosófica, puesto que en su época sólo un mandato imperativo de nuestra organización mental obligaba a sostenerlo. En efecto: no existían entonces argumentos procedentes de la experimentación sobre el mundo exterior que forzaran también a su aceptación. Y aunque no ha de olvidarse que somos parte de la Naturaleza, por cuya razón cuanto se impone a nuestro pensamiento de modo imperativo



no puede ser opuesto, ni siquiera diferente, de las leyes naturales, es siempre difícil seleccionar estos principios verdaderos de aquellos otros que son falsos productos del sedimento depositado por la educación en nuestra mente.

3. Nada tan instructivo para llegar a un claro juicio respecto del valor del principio de relatividad, y aun para justipreciar debidamente nuestros medios de conocer, como seguir la historia del pensamiento científico en sus relaciones con el referido principio, y ésta es la finalidad que persigue este libro.

Los fenómenos de observación más sencilla son los de movimiento, y por ello se comprende sin gran esfuerzo que haya sido la Mecánica el capítulo de la Filosofía natural que adquirió antes un pleno desarrollo, y que ha venido sirviendo de modelo a los restantes. En ella ha tenido también su primera presentación el principio de relatividad, aplicado al caso de observadores en movimiento relativo, no en concepto de postulado, sino como consecuencia lógica de los establecidos por Newton.

Es evidente que el estado dinámico de un punto material, representación la más sencilla de un cuerpo, será función de su velocidad, que define el movimiento, y de coeficientes específicos que distingan los diferentes puntos que se muevan de idéntico modo. Dicha función, que se llama *cantidad de mo-*

vimiento, y que designaremos por $\vec{G}$ (1), será un vector, pues sin ello no estaría representada en dicha magnitud la dirección del movimiento, cuya condición es evidente que ha de influir en los efectos que el estado dinámico determine. *A priori* la naturaleza de la función que liga $\vec{G}$ a la velocidad y los coeficientes específicos, puede ser cualquiera; sólo los resultados de la observación y la experiencia pueden decidirlo. La hipótesis más sencilla consiste en escribir

$$\vec{G} = m\vec{v} \qquad (3,1)$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad y m, que se llama *masa* del punto, representa los coeficientes específicos. Esta hipótesis fué hecha en los primeros días de la constitución de la Mecánica, y ha recibido la sanción de la experiencia en todas las aplicaciones que de esta ciencia se hicieron hasta estos últimos años.

Es un hecho de experiencia vulgar que una *fuerza* aplicada a un cuerpo altera su estado dinámico, cambiando la dirección de su movimiento, su velocidad, o ambos elementos simultáneamente. Pero Newton concretó este vago resultado de la observación y la experiencia más elementales en postulados perfectamente definidos. El primero es el de la *iner-*

---

(1) Véase la NOTA 1 en el apéndice.



cia, que consiste en afirmar la necesidad de una acción exterior, o fuerza, para cambiar $\vec{G}$: cuando ésta no existe, $\vec{G}$ será constante, y por tanto $\vec{v}$, de modo que el movimiento habrá de ser rectilíneo y uniforme.

Cuando la fuerza actúa, su efecto se puede considerar bien en relación al tiempo durante el cual se produce la acción, bien respecto a la porción de trayectoria que recorre el móvil mientras está sometido a ella. En el primer caso, la acción de la fuerza se denomina *impulso*, y Newton admitió, como un segundo postulado, que dicho impulso, medido por el producto de la fuerza $\vec{F}$ por el tiempo dt que dura la acción, es numéricamente igual al incremento $d\vec{G}$ de la cantidad de movimiento. Así

$$\vec{F}dt = d\vec{G} \quad \text{o} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{G}}{dt}. \qquad (3, 2)$$

En la hipótesis particular que ha dominado en la Mecánica clásica, $\vec{G} = m\vec{v}$, donde m es independiente de $\vec{v}$, la última ecuación toma la forma bien conocida

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}, \qquad (3, 3)$$

llamando $\vec{a}$ la aceleración del movimiento.

Cuando se refiere la acción al camino recorrido se



llama *trabajo*, y se mide mediante el producto de la fuerza por dicho camino. En la hipótesis sencilla de la Mecánica de Newton es fácil ver que esta magnitud, cuando se trata de un recorrido $\overrightarrow{dl}$ infinitamente pequeño, satisface a la ecuación

$$\overrightarrow{F}\overrightarrow{dl} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right), \qquad (3, 4)$$

de modo que corresponde al incremento de una nueva función de la masa y la velocidad, a la cual se denomina *energía cinética*. Este teorema es una consecuencia inmediata del postulado anterior, y se halla ligado con él de modo tan íntimo, que se pueden invertir sus papeles: admitiendo que la energía caracterice el estado dinámico y que sus cambios se engendren por el trabajo de la fuerza, el impulso resultará determinado por el incremento de la función $\overrightarrow{G} = m\overrightarrow{v}$. Así se explica que en el período de constitución de la Mecánica se haya pretendido por algunos, siguiendo a Leibtniz, adoptar este criterio en vez del que prevaleció en definitiva, que en aquella época defendió Descartes. Sin embargo, la pretensión era injustificada, porque la energía es una magnitud escalar, y deja, por tanto, sin especificar la dirección y sentido del movimiento.

Abandonando la hipótesis sencilla que da para el momento la expresión $\overrightarrow{G} = m\overrightarrow{v}$, siempre se podrá



la compatible con las condiciones impuestas por la constitución misma del sistema. Los vectores que miden esta cantidad de movimiento se suman siguiendo la regla general del polígono, por cuyo procedimiento se obtiene una resultante general, que se denomina *cantidad de movimiento del sistema*, y un par resultante. Fundándose en los postulados que ya he recordado, se demuestra con todo rigor que si las fuerzas exteriores al sistema son nulas; esto es, si dicho sistema permanece perfectamente aislado, tanto aquella cantidad de movimiento como el momento del par permanecen constantes. Cuando existen fuerzas exteriores, dichas magnitudes cambian de tal modo que sus incrementos elementales son iguales, respectivamente, a los impulsos de la resultante y del par a que se reduce el conjunto de dichas fuerzas.

Tal es el teorema general de la conservación de la cantidad de movimiento.

Por otra parte, también cada uno de los puntos materiales tiene su energía cinética, $\frac{1}{2} mv^2$, y como esta magnitud es de naturaleza escalar, se obtendrá la correspondiente al sistema mediante la simple suma aritmética $T = \sum \frac{1}{2} mv^2$. Sin duda, las fuerzas internas trabajan mientras los puntos se mueven individualmente, y estos trabajos, como son también



escalares, se suman aritméticamente. Además, en todos los casos que nos interesan el resultado de dicha suma para una deformación del sistema se expresa por el cambio que experimenta en virtud de ella una cierta función W, que se llama *energía potencial.* Se demuestra también aquí, utilizando las hipótesis y postulados de la Mecánica de Newton, que para un sistema aislado T + W es una cantidad constante, y cuando existen fuerzas exteriores el trabajo de ellas es igual al incremento de esta *energía total.* Este teorema expresa la *conservación de la energía*, que en el siglo anterior se generalizó en forma de *principio* aplicable a todo proceso físico.

En vez de la suma de las energías cinética y potencial, $\mathcal{E} = T + W$, consideremos su diferencia, $H = T - W$, y admitamos que el sistema material parte en el instante t_0 de un cierto estado o configuración de sus puntos, por llegar en el tiempo t_1 a otro estado. Perfectamente determinadas y fijas estas dos configuraciones y los tiempos en que ocurren, se pueden idear varios procesos que conduzcan el sistema del primero al segundo; pero la indeterminación que esto supone no es real. El sistema elige uno de estos procesos posibles de un modo fatal: aquel para el cual

$$\int_{t_0}^{t_1} H dt$$

tiene un valor mínimo; esto es, la diferencia entre



los promedios de las energías cinética y potencial durante el tránsito de una configuración a otra tiene el menor valor posible. Así, espontáneamente, el sistema selecciona, entre todos los caminos que le llevan de la una a la otra, aquel para el cual

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{H} dt = 0; \qquad (5, 1)$$

podríamos decir que reparte del modo más equitativo su energía total en las dos formas, cinética y potencial, que aquélla adopta.

Esta consecuencia de los postulados de Newton, quizá la más sublime, es en realidad de mayor alcance que ellos, y por eso se ha transformado en un principio fundamental con el nombre de *principio de Hamilton*, del cual se puede partir para constituir la Mecánica, aun después de la ruina de aquellos postulados que sirvieron para deducirle. En este caso queda realmente convertido en la afirmación de que existe una cierta función H de los parámetros que definen el sistema, que cumple con la condición (5,1) para el proceso de transformación. De ella se derivan entonces las leyes naturales que rigen los fenómenos dinámicos.

6. Volvamos a la ecuación fundamental de la Dinámica de Newton:

$$\vec{\mathrm{F}} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (6,1)$$

Ya hemos visto que en ella m como coeficiente



característico del punto material, es independiente de todo sistema de referencia. También $\vec{F}$ es una magnitud física de esta clase. Una y otra son, pues, *invariantes*: poseen idénticos valores para cuantos observadores puedan estudiar el fenómeno que se considera, sea cual fuere el estado de movimiento relativo en que se encuentren.

Como además figura en la ecuación únicamente el cambio de $\vec{v}$ por unidad de tiempo (la aceleración), es evidente que nada se altera cuando se suma o resta a $\vec{v}$ una cantidad constante; esto es, si en vez de medir la velocidad con relación a un sistema de ejes fijos, se utiliza otro que se mueva respecto del primero uniformemente. Así, para todos estos sistemas la ecuación fundamental (6,1) es la misma, y, por consiguiente, también lo serán las consecuencias que de ellas se deduzcan; de suerte que el estudio de los fenómenos mecánicos no permite distinguir entre sistemas de referencia de las condiciones indicadas.

Consideremos una máquina cualquiera situada en el interior de un vagón de un tren en movimiento uniforme. Para investigar su funcionamiento, basta en cada instante determinar las posiciones de sus diferentes órganos respecto de un sistema de referencia; las velocidades que figurarán en las ecuaciones dinámicas se obtendrán partiendo de los cambios de estas posiciones por unidad de tiempo. El



aludido sistema de referencia cambiará, como es lógico, con la situación del observador: si va transportado por el vagón, acudirá a ejes fijos a sus paredes; pero si está en una estación, los ejes los elegirá también ligados a ella, de modo que todas las velocidades que determine diferirán de las correspondientes al primer caso por efecto del arrastre del tren. No obstante, los resultados a que llegue en el primer supuesto serán los mismos que logre en el segundo; las leyes que rigen el funcionamiento de la máquina serán exactamente iguales, puesto que en último término derivan de la ecuación (6,1) que no se altera al pasar de un sistema de referencia al otro.

Tal es el contenido del *principio de relatividad* que se llama de Galileo y que reina en la Mecánica.

Pero la ciencia clásica adoptó un procedimiento concreto para correlacionar las ecuaciones referidas a los distintos sistemas coordenados a que vengo aludiendo, dotados de un movimiento relativo uniforme. Este procedimiento está contenido en el grupo para el paso de unos ejes a otros que se distingue con el nombre de Galileo. En el caso en que el movimiento se produce según el eje X_1, las ecuaciones tienen la forma

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 - Vt; \\ x'_2 &= x_2; \\ x'_3 &= x_3; \\ t' &= t. \end{aligned} \qquad (6,2)$$



En él las letras acentuadas se refieren a los ejes y reloj en movimiento con velocidad V respecto de los no acentuados.

Mientras se utilice este grupo es evidente que la ecuación (6,1) será un *invariante* de la transformación, y por ende satisface al principio de relatividad. De él es consecuencia inmediata que la relación entre las velocidades $\vec{u'}$ y $\vec{u}$ de un mismo fenómeno o cuerpo en los dos sistemas de referencia es

$$\vec{u'} = \vec{u} - \vec{V};$$

de modo que el paso de úna a otra se hace por la sencilla regla del paralelogramo.

7. Pero notemos que en el grupo en cuestión va contenido algo más que los postulados expresamente enunciados.

En primer término se admite la rigidez de los cuerpos durante el movimiento; esto es, la invariabilidad de su forma, sea cual fuere su velocidad. Dicho de otro modo más técnico, se admite que los lugares ocupados sucesivamente por los cuerpos son congruentes, con lo cual se otorga a la Geometría de Euclides el carácter de una representación exacta de la Naturaleza.

Imaginemos, para aclarar las anteriores ideas, que el vagón a que he venido refiriéndome está parado en la estación (V = *o*). La distancia entre dos puntos que se hallan sobre una recta paralela al



eje X_1, a su vez paralelo a la vía, la determina el observador situado en el tren mediante una regla graduada, L', que le es propia, y el que permanece en la estación utilizando otra exactamente igual, L, correspondiente a su laboratorio: ambas medidas darán evidentemente el mismo resultado.

Si ahora suponemos que el tren pasa por la estación con la velocidad V, la regla L' continuará dando para la distancia en cuestión la misma longitud; pero antes de afirmar que ocurre otro tanto cuando sea el observador de la estación, con su regla L, quien haga la medida, será necesario fijar la atención en el método por el cual esta medida se ejecute. Sin mayor insistencia se comprende que deberán anotarse las posiciones que ocupan en L los dos puntos a que vengo refiriéndome *en el mismo instante*: por ejemplo, mediante registros simultáneos y automáticos. Llamemos x_a, x_b estas posiciones; sean x'_a y x'_b las lecturas correspondientes en L', y como el proceso descrito indica que $t_a = t_b$, la primera ecuación del grupo de Galileo da

$$x'_a - x'_b = x_a - x_b .$$

Así también en este caso son idénticos los valores de la longitud según X_1, obtenidas por los dos observadores, y como es evidente que ha de ocurrir exactamente lo mismo con las medidas efectuadas en dirección normal a $\vec{V}$; en particular, según los ejes



X_2, X_3, la forma de las figuras será también idéntica, ya se aprecie con relación al sistema móvil o al fijo.

Si acudimos a la experiencia, obtendremos una confirmación plena de lo que he dicho, claro es que dentro de las condiciones a nuestra disposición; a saber: con movimientos que a lo más alcanzan la rapidez de las traslaciones de los astros en el firmamento. En efecto: la aludida confirmación surge de la comparación entre los fenómenos previstos por la teoría y aquellos que la observación o la experimentación suministra. Así no se trata de una imposición de la lógica, sino de un resultado empírico, y, por tanto, si lo elevamos de categoría, suprimiendo el límite de la velocidad alcanzado y generalizándole para cualquier valor de ésta, según hace la Mecánica clásica, establecemos implícitamente un nuevo postulado.

8. En segundo lugar, el grupo de Galileo supone la independencia absoluta del espacio y el tiempo; esto es, la posibilidad de reglar todos los relojes imaginables, en reposo o movimiento relativo uniforme, de modo que *simultáneamente* marquen la misma hora. Ahora bien: cuando se medita seriamente, se cae en la cuenta de que esta noción de la *simultaneidad* ofrece muy serias dificultades.

Si consideramos nuestras propias sensaciones, la simultaneidad o el orden de sucesión de las mismas



es un dato directo de la observación cuyo sentido no ofrece duda alguna: se aprecia de igual modo por un hombre culto o inculto. Pero las cosas pasan de un modo muy diferente si los sucesos ocurren fuera de nosotros mismos. Un hombre que nunca haya presenciado el disparo de un arma de fuego, admitirá con no pequeña dificultad que son fenómenos simultáneos el fogonazo de un cañón lejano y el ruido producido por el disparo; ¡cuán frecuente no es, entre gente de escasa cultura, resistirse a creer que el relámpago y el trueno son fenómenos absolutamente simultáneos, y qué esfuerzos no cuesta en ocasiones hacer comprender al vulgo que los fenómenos hoy percibidos en una estrella han ocurrido realmente mucho tiempo atrás, días, años, aun siglos! Y es que para llegar al establecimiento de la simultaneidad de dos hechos que se producen fuera de nosotros, nos vemos obligados a corregir los resultados de la observación directa a causa de la velocidad de propagación de las distintas acciones que nos denuncian fenómenos distantes.

Estas correcciones, para una acción determinada, pueden hacerse fácilmente cuando se dispone de otra cuya velocidad de propagación es infinita comparada con la suya: así, por ejemplo, pueden corregirse los retardos en el sonido utilizando la luz. Pero cuando no se dispone de este auxilio, únicamente es posible establecer la simultaneidad de dos



fenómenos que ocurren en diferentes puntos, mediante la hipótesis de una perfecta isotropía del espacio para la transmisión de una clase particular de acciones; esto es, la identidad de su velocidad de propagación cuando pasa de A a B y de B a A, sea cual fuere la orientación de la recta que une estos puntos. Sean, por ejemplo, dos relojes situados en ellos, que designaré por R_A y R_B: en un instante t_{A1} de R_A se produce en A un destello que llegará a iluminar la esfera de R_B cuando en ella se marca el tiempo t_B. Esta indicación se percibe en A en el instante t_{A2} de R_A. Supuesto que la propagación de la luz satisfaga a la condición de isotropía arriba aludida, es evidente que el sincronismo de los relojes estará asegurado cuando se cumpla la condición

$$t_B = \frac{t_{A1} + t_{A2}}{2}, \qquad (8,1)$$

y si no se satisface, la diferencia de valores de los dos miembros dará el atraso de uno de los relojes respecto del otro.

Pero demos un paso más y consideremos dos sistemas de puntos, S y S', que se compenetren mutuamente y en movimiento, cada uno respecto del otro, con una velocidad de módulo V. Supongamos que existe un fenómeno a cuya velocidad de propagación c se atribuye idéntico valor en S y S', y satisface a la condición de isotropía que es necesaria para que



pueda emplearse en la regulación de los relojes por el método arriba descrito. Así los observadores de cada sistema tendrán asegurado el sincronismo de sus relojes y por su medio pueden responder de la simultaneidad en puntos alejados. Pero cuando los de uno de ellos, el S, por ejemplo, estudien la propagación del fenómeno aludido, respecto del otro sistema, el S′, hallarán que la velocidad varía entre $c - v$ (según el movimiento de S′ respecto de S) y $c + v$ (en el sentido opuesto); naturalmente, los relojes que para S′ tienen la misma marcha, no podrán tenerla para S, y recíprocamente. Ello estriba en que S′ ha aplicado directamente la ecuación (8,1) en la sincronización de sus relojes, mientras contemplado el fenómeno desde el sistema S, se ha de tener en cuenta que mientras la acción va y vuelve entre los lugares A′ y B′, el primero de éstos avanza al espacio $V(t'_{A2} - t'_{A1})$, de modo que el sincronismo de los relojes se producirá cuando entre sus indicaciones se verifique la condición

$$t'_B = \frac{t'_{A1} + t'_{A2}}{2} + \frac{V}{c}\,\frac{t'_{A2} - t'_{A1}}{2} \qquad (8,2)$$

en vez de la (8,1).

Sólo es posible poner de acuerdo ambos sistemas de relojes, y con ello generalizar la noción de simultaneidad, cuando $c = \infty$; esto es, en el caso de que se disponga de una acción, empleable con el



fin indicado, que se propague instantáneamente. En la Mecánica clásica no hay nada que se oponga a la existencia de estas acciones y, por ende, a que en principio sea posible aceptar la noción de un tiempo absoluto; esto es, independiente del movimiento de los sistemas. Laplace, en particular, creyó demostrar que la gravedad, caso de no satisfacer a dicha condición, debe propagarse con una velocidad muy grande comparada con la de la luz.

Realmente, en la práctica la regulación de los relojes se ha hecho siempre utilizando acciones luminosas, que si bien es cierto que no cumplen con el requisito exigible teóricamente, dado el elevado valor de su velocidad cuando se le compara con los obtenibles para V, se pueden utilizar sin error apreciable por la pequeñez del factor $\frac{V}{c}$ en el último término de (8,2).



CAPÍTULO II

Los postulados de la Mecánica clásica en la Física

9. Las teorías mecánicas de los fenómenos físicos y el principio de relatividad.—10. Ecuaciones del campo electromagnético.—11. Contradicciones entre la teoría clásica y la experiencia.—12. La existencia del éter.—13. Su arrastre por la materia; aberración de la luz.—14. Experimento de Michelson.—15. Otros intentos para denunciar el movimiento respecto al éter.

9. Lo dicho en el capítulo precedente muestra que en el grupo de Galileo, como traducción del principio de relatividad, van implícitamente contenidas nociones cuya evidencia dista mucho de ser inmediata, de modo que su empleo equivale a agregar dos nuevos postulados a los que formuló Newton: el de indeformabilidad de los cuerpos por efecto del movimiento, que equivale a atribuir a la Geometría de Euclides el carácter de ciencia natural, y el de independencia de las nociones de tiempo y espacio. Quizá una forma más precisa para este último postulado sea la siguiente: en dos sistemas cuyo movi-



miento relativo es rectilíneo y uniforme, los únicos fenómenos que se propagan con idéntica velocidad, c en ambos, son aquellos para los cuales $c = \infty$.

Pero la introducción más o menos consciente de estos postulados no ha impedido que, mediante el grupo referido, se haya elaborado todo el maravilloso edificio de la Mecánica de Newton, gracias a la cual se formularon leyes precisas para fenómenos tan importantes como el movimiento de los cuerpos que integran nuestro sistema planetario. Si al repasar las páginas destinadas en cualquier tratado de Mecánica a esta teoría se piensa en el caos de la Astronomía anterior a Newton, se comprende que el grandioso éxito logrado haya hecho olvidar a muchas generaciones la necesidad de analizar con cierto cuidado los principios fundamentales de esta ciencia, y aun se la haya elevado a un rango en la clasificación de nuestros conocimientos que su propio autor distaba mucho de atribuirle.

Cierto que muchas particularidades de los movimientos planetarios escaparon en un principio a su interpretación; pero casi todos estos problemas fueron resolviéndose a medida que se perfeccionaba el conocimiento del sistema solar, y aun en ocasiones fué camino para el descubrimiento de nuevos planetas, como en el caso de Neptuno. Por eso los pocos enigmas que iban quedando, siquiera fuesen tan importantes como la rotación secular del eje mayor de



la órbita de Mercurio, no se creía que bastasen para motivar la alteración en sus mismos cimientos de la obra de Newton. Y no es que la crítica haya dejado de laborar sobre el valor de los postulados de la Mecánica, sino que realmente penetró poco en su contenido, y dejó intacto cuanto en ella es verdaderamente fundamental.

No sólo se tradujo la admiración debida a la obra de Newton por este respeto hacia ella, sino también por el deseo de utilizarla como base para la interpretación de los fenómenos naturales que no son simples movimientos aparentes de los cuerpos, bien considerándoles como manifestaciones sensibles de mecanismos ocultos, según procuran hacerlo las teorías atómicas, bien abordando el estudio de la Física mediante una generalización de los principios fundamentales de la Mecánica y la imitación de sus métodos de razonar. Este fué el camino seguido en todo el pasado siglo, y del acierto de su elección, por lo menos para un primer desbroce, es clara prueba el maravilloso avance de aquella ciencia.

En cambio, desde el punto de vista filosófico resulta que la imposibilidad de determinar el movimiento absoluto queda restringida a la Mecánica: por métodos ópticos y electromagnéticos será posible llegar a conocerlo, todo lo cual supone que el principio de relatividad no afecta a la capacidad de nuestros medios de conocer, sino a un orden particu-



lar de procedimientos. Ello es consecuencia de que las ecuaciones fundamentales para los fenómenos electromagnéticos contienen la velocidad, a diferencia de lo que ocurre con la que es base de la Dinámica, en la cual sólo figura la aceleración.

10. Veamos, en efecto, cuáles son las referidas ecuaciones fundamentales:

a) La primera expresa la relación existente entre las cargas eléctricas y el campo $\vec{E}$ que ellas provocan. La forma más elemental de esta relación es la ley de Coulomb, según la cual

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot \vec{r^0}, \qquad (10, 1)$$

donde ε es un factor característico de la naturaleza física del medio material en que los fenómenos se producen *(constante dieléctrica)*; r la distancia del punto en que se determina $\vec{E}$ a la posición ocupada por e, y 4π un factor numérico que responde a las unidades elegidas para las magnitudes eléctricas. Estas unidades imponen también la condición de que en el vacío, y prácticamente en los gases, $\varepsilon = 1$.

La forma de la ley de Coulomb conduce a sustituir la consideración directa de $\vec{E}$ por la de una cierta función que se llama *potencial*, definida para el caso de una carga e por

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\varepsilon r} + C, \qquad (10, 2)$$



y de la cual notoriamente se deduce que las componentes de $\vec{E}$ serán

$$E_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}.$$

Introducir Φ en vez de $\vec{E}$ tiene la ventaja de que al considerar la superposición de los efectos de varias cargas, el campo resultante se ha de calcular aplicando a cada punto la regla del polígono de las fuerzas, mientras el potencial total es una simple suma algébrica. Pero esto no eleva el potencial a la categoría de una verdadera magnitud física, puesto que no es directamente asequible a la experimentación y encierra una constante indeterminada que puse de manifiesto en (10, 2) mediante el término C. En el último capítulo volveré sobre la interpretación física de Φ, y entonces veremos que en el momento actual las cosas parecen cambiar de aspecto.

Agregaré aún que cuando las cargas no se hallan localizadas en puntos separados por distancias finitas, sino que éstas son infinitamente pequeñas, y el número de aquéllos muy grande, los razonamientos se simplifican sustituyendo su enumeración completa por una *densidad de cargas* definida mediante

$$\rho = \frac{de}{dv},$$

o sea el límite de la relación de la carga total al volumen en que se encuentra cuando este último tiende hacia cero, de modo que en (10, 1) y (10, 2) será menester reemplazar e por ρdv.

Decía arriba que la ecuación (10, 1) es la forma más elemental de la relación entre el campo y las cargas que lo engendran. Añadiré ahora que de un modo más



completo y riguroso esta relación está contenida en la ecuación

$$\rho = -\varepsilon\Delta\Phi, \qquad (10, 3)$$

llamada de Poisson, donde $\Delta\Phi$ es un símbolo que sustituye a

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}.$$

Una u otra ecuación permiten obtener el campo o el potencial cuando se conocen las cargas; pero esta última tiene la ventaja incuestionable de no hacer intervenir más que los valores de ρ y Φ que corresponden a un mismo lugar, mientras por la primera el campo es la consecuencia de la distribución de las cargas en todo el espacio.

b) Cuando una carga se halla en movimiento, el propio campo es transportado por ella, en el sentido de que en los puntos que ocupan en cada instante la misma posición respecto de la carga, $\vec{E}$ tiene idéntico valor y orientación. Si se imaginan dibujadas en el espacio que rodea a la carga curvas que en cada punto son tangentes a $\vec{E}$, es evidente que todas ellas partirán del lugar ocupado por aquélla, a modo de cabellera, y la misma proposición precedente puede formularse diciendo que la repetida carga lleva consigo el conjunto de sus *líneas de fuerza,* que así se llaman las curvas en cuestión.

Ahora bien: múltiples experimentos realizados por varios físicos, y primeramente por Rowland, han



probado que el indicado movimiento de una carga determina el nacimiento de un campo magnético $\overrightarrow{H}$, definido en magnitud por la expresión

$$H = \frac{1}{4\pi c} \frac{ev'}{r^2} \operatorname{sen} \alpha, \qquad (10, 4)$$

donde r es la distancia del lugar ocupado por la carga e al punto donde se determina H, v' la velocidad del movimiento, α el ángulo de esta velocidad con la recta r, y c una constante numéricamente igual a 3×10^{10} cm./sec., cuyo sentido físico veremos en seguida. Según se ve, el valor de H es constante en todos los puntos de una circunferencia que es normal a la dirección de v', y tiene su centro sobre la recta descrita por e. Además, comprueba la experiencia que $\overrightarrow{H}$ es tangente a dicha línea; todo ello en la forma que se representa en la fig. 2.

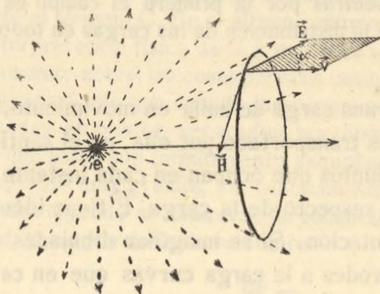


Fig. 2

Un razonamiento analítico exento de dificultades permite ver que las tres componentes de $\overrightarrow{H}$ en un sistema

cualquiera de coordenadas cartesianas pueden escribirse en la forma

$$H_1 = \frac{\partial P_3}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2}{\partial x_3}, \qquad H_2 = \frac{\partial P_1}{\partial x_3} - \frac{\partial P_3}{\partial x_1},$$

$$H_3 = \frac{P_2}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2};$$

o con una notación general

$$H_i = \frac{\partial P_k}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_k}, \qquad (10, 5)$$

donde las P_j son componentes de un nuevo vector, llamado *potencial*, que se definen por la ecuación

$$P_j = \frac{ev'_j}{4\pi cr}. \qquad (10, 6)$$

Este vector potencial es, como el escalar Φ, una magnitud cuyo uso simplifica la teoría de estos fenómenos, y paralelamente a lo que con él ocurría, no se halla determinado de modo inequívoco por las cargas y sus velocidades. Aun es aquí mayor la indeterminación que en aquel caso, pues sin dificultad se ve que los valores de H_i no se alteran cuando a cada una de las P_j se agrega la derivada, $\frac{\partial \psi}{\partial x_j}$, de una función escalar cualquiera

Cuando las cargas ocupan un volumen apreciable de modo que sea conveniente reemplazar la consideración de las cargas aisladas por su densidad ρ, en la forma en que he dicho poco más arriba, la simple comparación de las ecuaciones (10, 6) con (10, 2) indica que correspondiendo a (10, 3) debemos escribir

$$\frac{\rho v'_j}{c} = -\Delta P_j, \qquad (10, 7)$$

mediante la cual se relaciona la corriente $\rho v'$ de las cargas con el potencial vector en el mismo lugar.

Conviene advertir que si bien de cuanto llevo dicho se deduce la existencia simultánea de los campos eléctrico y magnético, nada se opone a que se manifieste el segundo sin que aparentemente exista el primero. Imaginemos que en cada elemento de volumen haya cargas iguales y de signos opuestos, pero que sus velocidades respectivas sean diferentes. Entonces no habrá campo eléctrico, puesto que $\Sigma e = 0$, mientras $H \neq 0$ porque $\Sigma ev' \neq 0$. Los conductores por los cuales, según el lenguaje clásico, pasa una corriente eléctrica, y los cuerpos magnéticos son ejemplos diferentes de este caso, según se ha demostrado cumplidamente por métodos cuya descripción escapa al plan de este libro.

Volvamos la atención a (10, 4). En ella se puede introducir el campo eléctrico E en vez de $\frac{e}{4\pi r^2}$, con lo cual

$$H = \frac{\varepsilon}{c} E v' \operatorname{sen} \alpha,$$

que conduce a interpretar el campo magnético como engendrado en cada lugar por el movimiento del trozo de línea de fuerza que pasa por dicho punto. Como $E\, v' \operatorname{sen} \alpha$ es el área del paralelogramo construído con $\overrightarrow{E}$ y $\overrightarrow{v'}$, como lados, se puede traducir esta fórmula diciendo que la magnitud de $\overrightarrow{H}$ es igual a $\frac{\varepsilon}{c}$ veces el área barrida por E en la unidad de tiempo.



Además, su dirección es normal a dicha área, según representa la fig. 2.

Así entendido $\vec{H}$, claro es que sea cual fuere la razón del movimiento de las líneas de fuerza de $\vec{E}$ se engendrará el campo magnético correspondiente. Consideremos un elemento de volumen de un cuerpo donde no haya electrización aparente por existir cargas iguales de signos opuestos superpuestos, según ocurre en estado neutro. Es fácil imaginar una acción que determine el alejamiento de ambas clases de cargas a una distancia d, sustituyendo el elemento de volumen neutro por una *pareja*. Se demuestra en Electrostática que en el estado de equilibrio permanente existirá un campo cuyas líneas de fuerza se representan en la fig. 3. Pero en nuestro caso dicho estado permanente no se establecerá en todo el espacio instantáneamente, sino que progresivamente irá apareciendo en lugares cada vez más apartados. El proceso se puede describir diciendo que las líneas de fuerza se propagan perpendicularmente a sí mismas y con la velocidad c', que resulta numéricamente igual a la constante c en el vacío, y muy próxima de ella para los medios materiales.

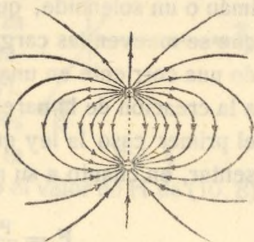


Fig. 3

Así para este caso

$$H = \frac{\varepsilon}{c} Ec'. \qquad (10,8)$$

c) Los fenómenos de inducción electromagnética que descubrió Faraday prueban que la producción de un campo magnético por el movimiento de las líneas de fuerza eléctrica tiene su recíproca en la creación de un campo eléctrico en todos los puntos barridos por las líneas de fuerza magnéticas. Este fenómeno se puede comprobar moviendo un imán o un solenoide, que corresponderá al caso en que se mueven las cargas eléctricas, o estableciendo una corriente en una bobina, que será lo análogo a la creación de la pareja a que me referí antes. En el primer caso la ley que define $\vec{E}$ se puede representar, en cuanto a su magnitud, mediante

$$E = \frac{\mu}{c} Hv'' \operatorname{sen} \beta, \qquad (10,9)$$

donde μ es una constante específica del medio, como antes lo era ε, mientras v'' es la velocidad del sistema que es origen de $\vec{H}$ y β el ángulo que forman entre sí $\vec{H}$ y $\vec{v''}$. Conviene, además, advertir que la posición de $\vec{E}$ respecto de $\vec{H}$ y $\vec{v''}$, es precisamente la opuesta de la de $\vec{H}$ respecto a $\vec{E}$ y $\vec{v'}$ en el caso anterior.

En el segundo caso el movimiento de las líneas de



fuerza magnéticas se produce también con la velocidad c' y normalmente a ellas, de modo que

$$E = \frac{\mu}{c} H c'. \qquad (10, 10)$$

La existencia de e te campo eléctrico se ha demostrado experimentalmente por Kuehne.

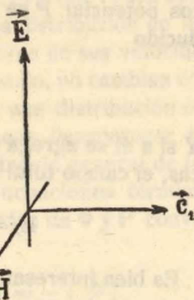


Fig. 4

Nótese que relacionando los campos $\vec{H}$ y $\vec{E}$ definidos por (10, 8) y (10, 10), resulta que siempre que se produzca una traslación de líneas de fuerza irán juntas las de ambas clases, y esto de modo que $\vec{H}$, $\vec{E}$ y $\vec{c'}$ tendrán las posiciones relativas que se señalan en la fig. 4, y además, trasladando el valor de H de (10, 8) a (10, 10) se obtiene

$$E = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} E c'^2,$$

de donde $c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ que define la velocidad de los campos en un medio diferente del vacío. En este último caso, puesto que $\varepsilon = \mu = 1$, $c' = c$. Conviene, además, recordar que la luz se reduce a un campo electromagnético tal como el que ahora estamos considerando, de modo que c' y c no son otra cosa que



sus velocidades en el seno de un medio material y en el vacío, y teniendo en cuenta la definición del índice de refracción, $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$.

También necesitamos recordar que cuando en (10, 9) se reemplaza H por su valor (10, 5) en función del vectos potencial $\overrightarrow{P}$ se obtiene para el campo eléctrico inducido

$$E_j = -\frac{1}{c}\frac{\partial P_j}{\partial t}.$$

Y si a él se agrega el originado por las cargas eléctricas, el campo total será

$$E_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{1}{c}\frac{\partial P_j}{\partial t}.$$

Es bien interesante notar que si se escribe $P_4 = -\Phi$ y $ct = x_4$, las ecuaciones que acabo de escribir toman la forma

$$E_j = \frac{\partial P_4}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_4}, \qquad (10, 11)$$

que recuerdan claramente las (10, 5).

Designando los campos $\overrightarrow{H}$ y $\overrightarrow{E}$ por una sola letra, *h* por ejemplo, con dos subíndices iguales y escritos en el mismo orden que los que afectan a las *x* en los denominadores de (10, 5) y (10, 11), se ve inmediatamente que estas ecuaciones imponen a las *h* las condiciones

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial x_j} = 0, \qquad (10, 12)$$

donde *i*, *j*, *k* representa una cualquiera de las cuatro coordinaciones que pueden formarse con los números



1, 2, 3, 4 tomados tres a tres. Así, habrá cuatro ecuaciones del tipo (10, 12) entre las seis componentes de ambos campos, que en definitiva expresan que dichos campos derivan de los potenciales P_i mediante las ecuaciones (10, 5) y (10, 11). Por consiguiente, son postulados fundamentales para la teoría de los fenómenos electromagnéticos.

Es indispensable advertir que (10, 3) y (10, 7) son aplicables únicamente al caso en que la distribución de las cargas eléctricas, así como los valores de sus velocidades en los diferentes puntos del espacio, no cambian con el tiempo. Esto es lo que se llama una distribución estacionaria o permanente. Si se hace desaparecer tal restricción, como conviene a una teoría general de los fenómenos, aparecen en ambas ecuaciones términos que contienen las derivadas segundas de Φ y P convirtiéndolas en

$$\left.\begin{aligned} \rho &= -\Delta\Phi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\Box\Phi \\ \frac{\rho v_i}{c} &= -\Delta P_i + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2} = -\Box P_i \end{aligned}\right\}. \quad (10, 13)$$

Estas ecuaciones son también cuatro en número, como las (10, 12), y si en ellas se escribe como antes $P_4 = -\Phi$, pueden agruparse en la

$$C_i = -\Box P_i, \quad (10, 14)$$

donde C_i representa a $\frac{\rho v_i}{c}$ para los valores de 1, 2, 3 de i, mientras $C_4 = \rho$. Este grupo de ecuaciones es también fundamental para la teoría, y establece la relación entre las cargas eléctricas y los campos que engendran.

Es un hecho experimental que las cargas obedecen a



la ley general de conservación, de suerte que la pérdida de electricidad sufrida por un volumen del campo es igual a la cantidad que durante el mismo tiempo atraviesa su superficie. Dicho de otro modo, las cargas eléctricas se mueven como un líquido incomprimible, fenómeno que, según la hidrodinámica enseña, se representa por la ecuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho v_3}{\partial x_3} = 0,$$

de donde, en virtud de (10, 13)

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3} = 0, \qquad (10, 15)$$

cuya ecuación reduce la indeterminación del vector potencial a una constante.

Es interesante notar que a más de las ecuaciones fundamentales (10, 12), que ya dije expresan la existencia de los potenciales P_i para el campo electromagnético, y de la ley de conservación de la carga eléctrica, traducida por (10, 15), puede admitirse un principio equivalente al de Hamilton (§ 5) para el campo electromagnético, y entonces las cuatro ecuaciones (10, 14) se pueden deducir como corolarios de la teoría. He aquí una primera justificación de la generalidad que dije tiene el principio en cuestión.

d) Ambos campos, eléctrico y magnético, actúan sobre la materia y son capaces de ponerla en movimiento. Cuando se trata de $\vec{E}$ esta acción es consecuencia de las cargas aparentes en los cuerpos



y su valor se obtiene mediante el producto de $\vec{E}$ por dichas cargas. La acción de $\vec{H}$ se ejerce siempre que existan cargas en movimiento, y su valor para las positivas es $\frac{e\mu}{c}$ Hv''' sen α, con la dirección que representa la fig 5. En definitiva, la acción total sobre la carga e será para el caso en que $\mu = 1$

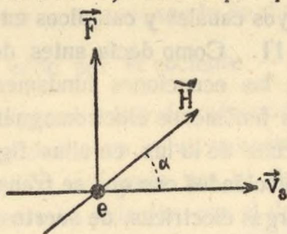


Fig. 5

$$\overrightarrow{Fe} = \overrightarrow{Ee} + \frac{e}{c} \overrightarrow{Hv'''} \text{ sen } \alpha, \qquad (10, 16)$$

entendiéndose, dicho se está, que se trata de una composición de vectores y no de una suma aritmética, y que la dirección del último sumando es normal a $\vec{H}$ y $\vec{v'''}$, según dije ya.

Las cargas en movimiento pueden mostrarse directamente, como en los casos de un cuerpo electrizado, de los iones gaseosos y de los rayos α y β de las substancias radioactivas, pero pueden escapar a la observación, como las que forman la corriente que circula por un conductor o en las moléculas de los cuerpos magnéticos (corrientes de Ampère).

La confirmación de (10, 16) resulta de todos los experimentos de la Electrostática y el Electromagnetismo, y muy particularmente de los realizados al



estudiar las desviaciones que $\vec{E}$ y $\vec{H}$ producen sobre los iones positivos y negativos que constituyen los rayos canales y catódicos en los tubos de vacío.

11. Como decía antes de comenzar el bosquejo de las ecuaciones fundamentales para la teoría de los fenómenos electromagnéticos, y como caso particular de la luz, en ellas figuran explícitamente las velocidades con que se transportan los campos y las cargas electricas, de suerte que un cambio de sistema de referencia ha de modificar los fenómenos aparentes. De otro modo, cuando una vez estudiadas las leyes que los rigen para un observador que se halle en reposo relativamente al sistema en que aquéllos se producen, efectuamos en sus expresiones analíticas las transformaciones indicadas por el grupo de Galileo, con el fin de conocer las leyes que serán válidas respecto de otro observador dotado de un movimiento rectilíneo y uniforme relativo a aquél, hallamos diferencias que contienen explícitamente la velocidad y permiten determinarla. Fué Hertz quien primero hizo esta aplicación de las ecuaciones de transformación de Galileo, con lógica innegable en atención a las ideas dominantes en su época.

Las consecuencias que así se derivan están, sin embargo, en absoluta contradicción con los resultados experimentales. Citaré dos ejemplos que ofrecen el mayor interés y son típicos:



a) En primer término, supongamos una onda luminosa que avanza en el seno de un cuerpo transparente. Para un observador en reposo, según he dicho antes, su velocidad se mide por el cociente $\frac{c}{n}$ (de la velocidad en el vacío por el índice de refracción). Para un observador que se mueva relativamente al cuerpo con velocidad $\pm$ V, indicando por el signo el sentido del movimiento en relación con el de la propagación, las ecuaciones de Galileo obligan a pensar que la velocidad de la onda debe ser

$$\frac{c}{n} \pm V.$$

Mucho antes de que Hertz formulara la teoría general, uno de cuyos corolarios es la predicción teórica anterior, Fresnel dió la interpretación de ciertos experimentos de Arago, que corresponden al mismo orden de ideas, pero son de naturaleza bastante más compleja, suponiendo que en la fórmula anterior v ha de multiplicarse por el factor

$$\varphi = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

que se denomina de arrastre, por razones de que me ocuparé más adelante. La existencia real de dicho factor fué confirmada experimentalmente por Fizeau, en trabajos que serán siempre considerados como modelos de ingenio y precisión, en los cuales el cuerpo en movimiento fué el agua. Posteriormente, con



la mayor perfección que consiente la técnica moderna, ha sido también comprobado por Michelson y Morley y por Zeeman, siempre en el mismo líquido. El trabajo de este último deja además fuera de duda la presencia del sumando adicional

$$-\frac{\tau}{n}\frac{dn}{d\tau}$$

(donde τ es el período) que corresponde a la dispersión. Los resultados numéricos de Zeeman están contenidos en la tabla siguiente:

λ en A°	φ_F	φ_L	φ exp.
4500	0,443	0,464	0,465
4580	0,442	0,463	0,463
5461	0,439	0,454	0,451
6870	0,435	0,447	0,445

Aun con posterioridad, Zeeman y Snethlage han demostrado que la teoría se verifica con exactitud comparable en el cuarzo.

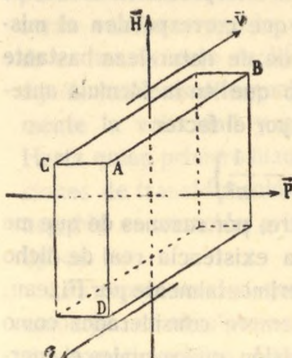


Fig. 6

b) En segundo término, imaginemos un prisma dieléctrico ABCD (fig. 6) de constante ε, cuyas dos caras paralelas al plano ABD son conductores, fijo en el espacio, donde existe un campo magnético $\overrightarrow{H}$ que



se transporta paralelamente a sí mismo y a la arista BA del prisma con la velocidad $\vec{V}$. La ecuación (10, 9) nos dice que se producirá un campo eléctrico normal a aquellos dos vectores,

$$E = \frac{1}{c} HV,$$

si se supone que μ para el dieléctrico es la unidad; el cual campo engendrará en las armaduras, supuestas al mismo potencial, cargas cuyas densidades serán:

$$\pm \frac{\varepsilon}{c} HV.$$

Supongamos ahora que el campo magnético permanece fijo y en cambio se mueve la lámina con velocidad $-\vec{V}$. Los fenómenos debieran ser exactamente los mismos, pues la diferencia entre uno y otro se reduce al cambio de posición del observador, desde un lugar fijo al dieléctrico a otro que lo está en el campo magnético. Sin embargo, Wilson, que ha realizado el experimento, obtiene para la densidad de cargas en este caso $\pm \frac{\varepsilon - 1}{c} HV$; resultado que explica, además, el efecto nulo obtenido por Blondlot anteriormente, empleando como dieléctrico el aire, puesto que para los gases $\varepsilon = 1$, dentro de los errores que en estos experimentos pueden cometerse.

12. Los trabajos que acabo de recordar, y no



son los únicos, ponen bien en evidencia cómo la aplicación del grupo de Galileo a los fenómenos electromagnéticos resulta completamente injustificada, por lo menos en la forma en que fué hecha por Hertz.

Pero antes de seguir adelante, conviene advertir que ni el sabio alemán ni los demás físicos, en la época en que esta cuestión surgió, la plantearon en los términos en que lo he hecho. Por entonces la existencia del éter se consideraba innegable, y así Lord Kelvin podía decir que teníamos un conocimiento de su naturaleza más completo que de la materia ordinaria, puesto que todo lo que habíamos de exigirle estaba contenido en aquellas ecuaciones del campo electromagnético que he recordado arriba.

Precisamente la seguridad que esta opinión revela nace del papel principalísimo que la Mecánica de Newton desempeñaba en la Física. Esenciales en ella son los teoremas de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía para los sistemas aislados, así como la distinción radical entre materia y energía, que otorga a aquélla la condición de soporte de las magnitudes $\vec{G}$ y $\mathcal{E}$. Ahora bien: los teoremas indicados dejan de cumplirse para los fenómenos electromagnéticos cuando no se admite la existencia del éter.

Comenzaré por la conservación de $\vec{G}$. Imaginemos un foco radiante electromagnético E (fig. 7), luminoso o de ondas hertzianas, fijo al foco geométrico



de un espejo parabólico, para que los rayos salgan del sistema en una dirección única. A larga distancia de este aparato emisor, supondré otro, A, que

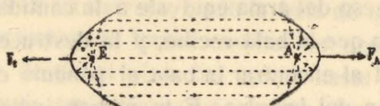


Fig. 7

recoja y absorba íntegramente la energía de aquellos rayos. La teoría demuestra que sobre cada sistema, respectivamente durante la emisión y la absorción, actúan fuerzas, F_E y F_A, iguales y dirigidas según la recta que los une; pero cuyos sentidos son opuestos, pues el de la primera es contrario, y el de la segunda, idéntico al de propagación del haz.

La experimentación ha comprobado exactamente la realidad de F_A, gracias, principalmente, a los trabajos de Nicholson y Hull, y si no se ha logrado también para F_E, hay que atribuirlo a las insuperables dificultades técnicas que se oponen a la realización de los experimentos indispensables.

Las cosas ocurren del mismo modo que cuando se dispara un arma de fuego sobre un péndulo balístico: el choque de retroceso en el arma es igual al impulso que el péndulo recibe por la acción de la bala, despreciado el efecto del aire. En uno y otro caso, las acciones inicial y final son iguales y opuestas,



como exige el tercer postulado de Newton; pero no actúan sobre el mismo sistema rígido ni son simultáneas, requisitos también indispensables.

Para este último caso no existe problema, porque el retroceso del arma equivale a la cantidad de movimiento que la bala recibe, y la destrucción de tal cantidad al encontrar la bala al péndulo constituye el origen del impulso. Esto parece indicar que el acuerdo de los fenómenos radiantes con la Mecánica ha de lograrse admitiendo que la radiación electromagnética transporta también una cantidad de movimiento, gracias a la cual el impulso que corresponde al retroceso del aparato emisor E se transmite al absorbente A.

Notemos aún que también existe incumplimiento aparente del principio de la conservación de la energía en el caso referido. En efecto; el foco emisor E consume energía que sólo vuelve a ponerse en evidencia cuando, andando el tiempo, la energía es absorbida en A. Entre el momento en que el consumo se produce y aquel en que la energía se hace sensible nuevamente, nada sabemos de ella, y este intervalo puede ser muy largo: centenares de años a veces. Baste recordar que la energía que supone la reducción de la sal de plata en una placa fotográfica en que se recoja la imagen de ciertos conjuntos estelares corresponde a una emisión luminosa que se produjo hace millares de años a distancias de nuestro



sistema solar que la imaginación no acierta a representarse. Así, para retener el principio de la conservación de la energía, ha de pensarse que la luz la transporta en su carrera, como la bala de que antes hablaba acarrea en forma cinética la energía del explosivo desde el alma del cañón hasta el lugar donde han de producirse sus efectos destructores.

Si pudiéramos dejarnos arrastrar por la analogía con el ejemplo de que vengo sirviéndome, caería en la hipótesis de la emisión de partículas luminosas, que Newton defendió con tanto ahinco contra los argumentos de Huyghens, y que los clásicos experimentos interferenciales de Young y Fresnel arruinaron de manera definitiva, sustituyéndola por la teoría de las ondulaciones. Pero ello no supone ninguna dificultad, porque es bien sabido que las ondas que se producen en los medios materiales transportan también cantidad de movimiento y energía, aunque en ellas no haya acarreo de materia. Basta, pues, que el universo entero, en toda la extensión que la luz puede recorrer en tiempos infinitos, esté lleno de algo material capaz de transmitir las ondas luminosas con la enorme velocidad de 300.000 kilómetros por segundo: este medio universal es el que los físicos han llamado *éter*, y que, según decía arriba, creyeron conocer con mucha mayor precisión que la materia misma, puesto que sólo le exigían servir de soporte a los campos eléctrico y magnético.



En él se encuentran sumergidos todos los cuerpos, no como un sólido en el seno de un flúido, desalojándole del espacio que ocupa, sino que en él se bañan por igual hasta las últimas partículas que los integran, estableciéndose la ligadura entre ambas substancias, materia y éter, gracias a las cargas eléctricas que son elemento integrante, quizás único, de aquélla.

13. Pero si el éter es el soporte de los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$, cuando hablamos de velocidades de estos campos en las leyes fundamentales, ha de entenderse respecto de un sistema de referencia ligado a él, y los fenómenos que se produzcan por efecto del movimiento de los cuerpos dependen esencialmente de la respuesta que se dé a la siguiente pregunta: la materia en su movimiento ¿transporta al éter que la empapa? La hipótesis de Hertz, que discutí más arriba, equivale a que aquélla sea afirmativa, que hemos de convenir se ofrece al espíritu como la concepción más sencilla.

Mas los experimentos recordados antes por vía de ejemplo, prueban que es indispensable renunciar a tal hipótesis y suponer, bien un arrastre parcial del éter, según admitió Fresnel y de donde procede el nombre del coeficiente φ, bien su reposo absoluto en tanto los cuerpos se mueven en su seno, solución ésta, indudablemente, más lógica. Claro que entonces es indispensable explicar el arrastre parcial que



los referidos experimentos denuncian, y el mérito de ello corresponde a H. Lorentz.

Según el profesor holandés, siguiendo ideas clásicas de Mossoti, el campo $\vec{E}$ determina en cada átomo de los cuerpos materiales una separación de las cargas positivas y negativas, análoga a la que produce en los conductores y que se manifiesta en la influencia eléctrica. El fenómeno de conjunto que podemos apreciar es una *polarización* de componentes p_i, que se traduce por la aparición de cargas eléctricas positivas en la superficie del dieléctrico por donde el campo $\vec{E}$ sale, y negativas en aquellas por donde entra; numéricamente la densidad de estas cargas es $\pm (\varepsilon - 1)$ E. Así, en el experimento de Wilson, al mover el dieléctrico son estas cargas

$$\pm \frac{\varepsilon - 1}{c} \mathrm{H}\, v,$$

reemplazando E por su valor (10, 9), de acuerdo con el resultado obtenido.

Análogamente, el cambio de velocidad que la luz sufre al penetrar en un cuerpo transparente se debe a la alteración periódica de la polarización de sus átomos, originada por el campo eléctrico de la onda luminosa. Dicha polarización periódica convierte cada átomo en un foco luminoso secundario cuya emisión se superpone a la luz incidente, dando lugar a una onda compleja, que es aquella a quien se refie-



re la medida de la velocidad dentro del cuerpo. Claro es que el movimiento de la materia afecta únicamente a esta luz secundaria, sin que en nada modifique a la onda que penetró en ella, y sigue avanzando a través del éter fijo, y un cálculo detallado demuestra que esto se traduce por un aparente arrastre parcial de la onda compleja, que coincide con el calculado por Fresnel.

Además existe otro fenómeno, de largo tiempo conocido, que prueba aún de modo más concluyente el reposo del éter mientras la materia se transporte en su seno. Me refiero a la *aberración de la luz.*

Cuando se ha de mirar un astro con un anteojo, no se apunta en la dirección AB (fig. 8) en que éste se encuentra en el momento de la observación, sino que el eje óptico AC ha de formar con AB un ángulo dependiente de la velocidad de la Tierra: el necesario para que la onda luminosa que pasa por el centro óptico del objetivo llegue a la cruz filar en el instante en que ésta se encuentra sobre el rayo. Esto significa que nuestro movimiento no perturba a la onda en su propagación, puesto que el anteojo se orienta precisamente según requeriría la regla de

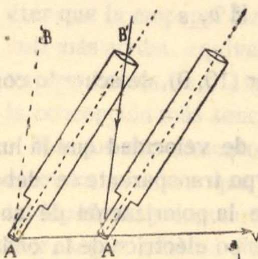


Fig. 8

composición de las velocidades $\vec{c}$ y $\vec{v}$, supuestas perfectamente independientes, y tratándose de un movimiento ondulatorio, equivale a suponer que avanzamos en el éter sin arrastrarlo. Realmente esta consecuencia del fenómeno de la aberración no pareció tan evidente a muchos de los físicos que han discutido este asunto, uno de los que más preocuparon la opinión científica en los días en que se afirmó la teoría ondulatoria de la luz.

Fueron varios los experimentos efectuados con el fin de denunciar el movimiento de la Tierra a través del éter, siempre con resultado negativo, y de los cuales no me ocupo porque muy pronto he de llamar la atención sobre otros más perfectos realizados posteriormente; y en presencia de este fracaso permanente, lo más lógico era suponer que el éter es arrastrado. Para que ello no dejara a la aberración huérfana de explicación, Stokes sugirió que el éter tiene una constitución tal que se comporta como un flúido sin viscosidad para los movimientos lentos, y como un sólido de elevada rigidez para las vibraciones muy rápidas. Ello permitiría a las ondas luminosas propagarse con la velocidad que ellas lo hacen, y al propio tiempo haría que estas ondas, al pasar de una región del éter en reposo a otra arrastrada por la Tierra, no cambiasen la orientación de su frente. Pero las dificultades que entonces surgen son grandes, y de ellas se deduce con plena evidencia que las

ideas de Stokes son un mero expediente para soslayar una dificultad, no una construcción teórica perfectamente lógica, por lo cual no vale la pena detenernos más en su análisis (1).

Diré aún que la explicación del fenómeno que nos ocupa por una composición de la velocidad de la Tierra con la de la luz sugiere la posibilidad de que su magnitud sea función de la naturaleza del medio en que aquélla se propaga, como pensó Boscovich; pero atendiendo a la interpretación dada para el coeficiente de arrastre de Fresnel, se comprende, sin más detalle, que tal influencia no exista, de acuerdo con el efecto negativo a que llegó Airy estudiando la aberración con un anteojo lleno de agua.

14. Notoriamente, la existencia de un éter en permanente reposo, mientras los cuerpos se trasladan en su seno, equivale a negar la equivalencia de todos los sistemas de coordenadas, que sólo difieran en un movimiento rectilíneo y uniforme, y, por tanto, la universal aplicación del principio de relatividad, válido en la Mecánica. Los ejes de referencia que se hallen fijos al éter ocupan una posición privilegiada, según demuestran los resultados de la observación y la experiencia recordados anteriormente: la misma simplicidad de naturaleza que se atribuyó al medio

(1) Puede verse una crítica más completa en Larmor, *Æther and Matter*.



universal, en cuanto sólo se exigía de él que sirviera de soporte a los campos eléctrico y magnético, permite que se le sustituya por el sistema de ejes privilegiados a que aludía, caracterizados porque con relación al mismo las ecuaciones fundamentales de los fenómenos electromagnéticos tienen forma definida. Y entonces claro es que puede hablarse de velocidades absolutas en el espacio, dando a este término el sentido de velocidad relativa a dicho sistema privilegiado.

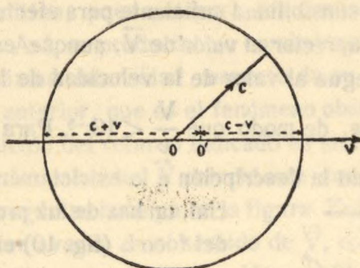


Fig. 9

Supongamos, por ejemplo, que en un instante determinado t_0 y en el lugar del espacio 0 (fig. 9) en que entonces nos hallemos, producimos un destello luminoso. La onda avanzará en el éter con velocidad constante c en todas las direcciones, formando una esfera de radio creciente, pero cuyo centro permanece clavado en el mismo lugar 0 donde se produjo



el destello. Entre tanto, nosotros avanzamos con velocidad $\overrightarrow{V}$, de suerte que la distancia que nos separará de la cresta de la onda en cualquier tiempo t_1 posterior, cambiará con la dirección, y como el cociente de dicha distancia por $t_1 - t_0$ mide la velocidad aparente de la luz, esta magnitud variará entre $c - V$, para la dirección de nuestro movimiento, y $c + V$ para la opuesta.

Naturalmente, la realización de este experimento debe dar un método para medir $\overrightarrow{V}$ sin acudir a ningún fenómeno extraterrestre. Michelson ideó en 1887 un método de sensibilidad suficiente para efectuar estas medidas y apreciar el valor de $\overrightarrow{V}$, aunque esta magnitud no llegue al valor de la velocidad de la Tierra en su órbita, de modo que $\frac{V}{c} < 10^{-8}$. Para este fin, y reduciendo la descripción a lo estrictamente esencial, un haz de luz procedente del foco L (fig. 10) encuentra un lámina semitransparente A, donde se bifurca en el rayo AB, continuación del haz primitivo, y el AB_1, perpendicular a él. A distancia igual, (l), para ambos rayos se encuentran los espejos B y B_1 que los reflejan nuevamente hacia A_1, y allí cada uno se bifurca del mismo modo que el haz primitivo. Basta considerar los semirrayos que se pro-

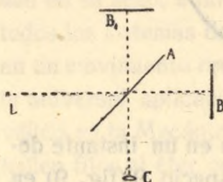


Fig. 10



pagan según AC y vienen a sumar sus efectos en C.

Si el sistema se hallase en reposo relativamente al éter, como los caminos que los dos rayos han hecho son iguales y las velocidades con que los han recorrido idénticas, al superponerse según AC sus fases serán perfectamente concordantes y en dicha dirección la intensidad será máxima. Pero cuando el sistema se mueve, las diferencias en la dirección de los rayos ABA y AB_1A engendran un retardo en el uno respecto del otro, que ha de compensarse considerando rayos que formen un ángulo ligero respecto del primitivo, pues entonces los caminos no serán iguales. Así, se producirá un corrimiento de la franja de máxima intensidad respecto de su posición en el caso anterior, que es el fenómeno observable.

El cálculo del retardo indicado es fácil, cuando se supone la velocidad $\vec{V}$ coincidente con uno de los rayos, según se hace ya en la figura. Entonces, de A a B la luz avanza en el sentido de $\vec{V}$, con lo cual su velocidad aparente será $c - V$, y de B a A la dirección es opuesta, y esta última magnitud tendrá el valor $c + V$. En definitiva, el tiempo invertido por la onda desde que pasa por A hasta que vuelve a dicho punto será:

$$T_1 = l\left(\frac{1}{c - V} + \frac{1}{c + V}\right) = \frac{2l}{c}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1}.$$

En cuanto al rayo AB_1 ha de tenerse en cuenta



que mientras la luz va de uno a otro punto, el aparato se corre en el sentido de $\overrightarrow{V}$, de modo que la velocidad aparente será el cateto perpendicular a V del triángulo de la figura 11; esto es $(c^2 - V^2)^{\frac{1}{2}}$, y cosa idéntica ocurre en el recorrido de vuelta de la onda. Así el tiempo total será:

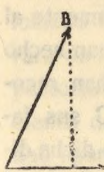


Fig. 11

$$T_2 = 2\frac{l}{c}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

El retardo se medirá evidentemente por

$$T_1 - T_2 = \frac{l}{c}\frac{V^2}{c^2}. \qquad (14,1)$$

Haciendo girar a todo el aparato 90°, las direcciones AB y AB_1 se cambian, con lo cual el retardo se invierte. Así, el corrimiento observado, pasando de una posición a otra del sistema, será doble de (14,1), y expresado en fracción de la distancia que separa a las bandas de interferencia observadas en C, será:

$$\frac{2l}{\lambda}\frac{V^2}{c^2}.$$

Posteriormente a la realización por Michelson y Morley de este experimento ha sido repetido por Morley y Miller, mejorando la disposición en forma que permitía apreciar una centésima del efecto previsto, no obstante lo cual, los resultados fueron ne-



gativos, y esto sea cual fuera la época del año en que se obtuvieron.

Es definitiva, la velocidad de la luz, no obstante el movimiento de la Tierra, es independiente de la dirección en que se determine, resultado cuya interpretación más directa es el arrastre del éter por los cuerpos que en él se mueven, en oposición a los experimentos citados precedentemente.

15. No se trata de un experimento aislado. Tal circunstancia quitaría un poco de valor a las consecuencias de él derivadas, no obstante la gran precisión del mismo y la variedad de condiciones en que fué ejecutado, gracias a todo lo cual, ha podido resistir a una crítica bien persistente que apenas si ha cesado. Aun muy recientemente Righi creyó encontrar una causa de error en la interpretación del experimento, que ha sido rebatida por varios físicos y, entre ellos, por el español P. de Rafael.

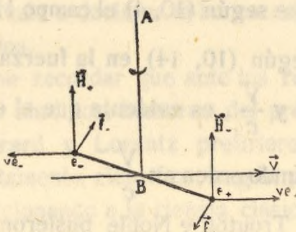


Fig. 12

Por otros caminos se llegó a la misma conclusión. Imaginemos dos cargas eléctricas numéricamente iguales, pero de signos opuestos, e_+ y e_-, sujetas en las extremidades de una varilla rígida (fig. 12) que va suspendida por un hilo AB de un soporte fijo

a nuestro laboratorio. La tierra arrastra a este sistema con una velocidad $\vec{V}$ que supondré no es perpendicular a la varilla. En la hipótesis del éter en reposo, como las ecuaciones de los campos han de referirse a los ejes en él fijos, cada carga produce un campo magnético cuyos valores H_+ o H_-, en el lugar ocupado por la otra, se han representado en la figura, claro que prescindiendo de toda escala. Entonces e_+ y e_- se hallan en movimiento en los campos magnéticos en cuestión y, por ende, experimentarán acciones que también están dibujadas, y, según se reconoce, engendran un par que tiende a torcer el hilo en la forma que la flecha curva señale. Puesto que según (10, 4) el campo H es proporcional a $\frac{V}{c}$, y según (10, 14) en la fuerza figuran como factores H y $\frac{V}{c}$, es evidente que el efecto previsto es de segundo orden en $\frac{V}{c}$.

Trouton y Noble pusieron en práctica este método para denunciar nuestra velocidad en el éter, constituyendo el sistema rígido que lleva las cargas e_+ y e_- mediante un condensador. La rotación producida por el momento de la carga no pasó del 5 por 100 de la cantidad calculada, de suerte que es perfectamente atribuible a las perturbaciones inevitables.

También de aquí, como del experimento de Michel-



son, es necesario concluir que el éter es arrastrado completamente por la Tierra en su movimiento, en contradicción manifiesta con la aberración de la luz y los experimentos de Fizeau y Wilson. La consecuencia inmediata parece ser la admisión de una multiplicidad de medios cuyas propiedades son idénticas al éter y que existen superpuestos en cada punto del espacio, con cuya idea chocamos notoriamente, y es lógico que, al menos en un cierto momento de la historia de este capítulo de la ciencia, hayan sido muchos los físicos que, con Einstein y Planck, prefirieron prescindir de este medio, cuya existencia es corolario obligado de ciertos postulados de la Física. Naturalmente, ello equivale a declarar la bancarrota de los referidos principios.

Sin embargo, conviene recordar que ante los resultados contradictorios aludidos, hombres del profundo valer de Fitzgerard y Lorentz prefirieron aplicar el método estrictamente científico, según ya recordaba en el § 1, adicionando a la ciencia clásica la hipótesis del acortamiento de los cuerpos en el sentido del movimiento. Pero entonces era lógico presumir que este cambio de dimensiones se denunciase por una disimetría de constitución. Así, Lord Raylegh y Brace investigaron la existencia de una doble refracción en los cuerpos isótropos, y Trouton y Rankine, una diferencia en la conductividad metálica, sin que el éxito coronase las tentativas. Cierto que



pueden buscarse mecanismos que permitan en cada caso la explicación de los resultados experimentales, como lo hiciera Lorentz para la doble refracción prevista por Lord Raylegh. pero es indudable que la misma complejidad que así se va creando en la Ciencia es una prueba de la arbitrariedad del método. Es preferible acudir al análisis de los postulados mismos que son los cimientos del edificio científico; lo cual equivale a la aceptación de la ruina completa de ésta, utilizando los hechos innegables aportados por la experiencia en la nueva construcción. En último término, esto representa la obra de Einstein.



CAPITULO III

Principio restringido de relatividad

16. Postulado de invariancia de las leyes naturales.—17. Postulado de invariancia de la velocidad de la luz: grupo de Lorentz.—18. La contracción de Fitzgerald. 19. La marcha de los relojes.—20. Composición de velocidades.—21. La dinámica fundada en el principio restringido de relatividad.—22. La noción de masa.—23. Energía y masa.—24. El principio de Hamilton para la Mecánica relativista.—25. Las ecuaciones de transformación de los campos eléctrico y magnético.

16. Terminaba el capítulo precedente diciendo que la serie de dificultades y contradicciones a que se ve arrastrada la Ciencia clásica cuando pretende interpretar los resultados experimentales, obliga a un análisis cuidadoso de los postulados en que se asienta, siquiera la modificación que de este análisis se derive obligue a su completa reconstrucción. Siempre será utilizable para esta nueva obra el acopio de materiales hecho para la antigua, tanto más



cuanto que es exigible a las nuevas teorías el admitir las concepciones clásicas como casos límites. De otro modo sería imposible comprender la eficacia de estas últimas para la inmensa mayoría de los fenómenos estudiados hasta fines del pasado siglo.

También dije que este análisis es la obra de Einstein, quien señaló en el grupo de Galileo los dos postulados que representan la noción del cuerpo rígido y la independencia absoluta del espacio y el tiempo. Einstein renuncia a estos postulados; prescinde de una noción concreta del espacio y el tiempo como elementos básicos de nuestro conocimiento del mundo exterior; afirma la imposibilidad de reconocer si nos hallamos en reposo absoluto o dotados de una velocidad constante en magnitud y dirección, sea cual fuere la naturaleza del fenómeno físico que se ponga a contribución para este fin. Y parte de esta afirmación expresa de nuestra incapacidad: del valor relativo de nuestro conocimiento desde este punto de vista, para elaborar una nueva noción del cuerpo sólido y del tiempo que sea compatible con tal postulado.

Concretamente, en presencia del problema planteado, Einstein se limitó a aceptar de un modo explícito como hechos indudables los resultados directos de la experiencia, de cuyo valor, en cambio, se mostraron tan propicios a dudar los técnicos, por lo demás, defensores intransigentes del método experi-



mental como única fuente de conocimiento. Hecho curioso: hombres dotados de espíritu profundamente filosófico, como Einstein, defendiendo con denuedo los fueros de la observación y la experiencia contra técnicos de aquellos métodos que anteponen sus rancios prejuicios a los resultados inmediatos por ellos obtenidos.

Decía que Einstein se limitó a aceptar como hechos indudables aquellos que son observados con plenas garantías contra el error. Esta premisa obliga a afirmar, en presencia del experimento de Michelson, que cuando se engendra una onda luminosa en un punto del espacio, dicha onda será esférica, tanto para un observador respecto al cual el punto está fijo, como para otro que se traslade relativamente a él con movimiento uniforme y rectilíneo; y esta afirmación ha de hacerse aunque nuestra mente, educada por la geometría de Euclides, se resiste a concebirlo. Si designamos a los observadores aludidos por O y O′, y suponemos que los dos coinciden en el instante de engendrarse la onda, de modo que en la ignorancia del movimiento absoluto ambos pueden juzgarse fijos en el punto de donde aquélla partió, se expresa analíticamente la afirmación precedente escribiendo:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - ct = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 - c_1 t'. \quad (16,1)$$

Como el experimento de Michelson no es el único



del cual se pueda partir para reconstruir la Ciencia, acaso se tema que los resultados difieran cuando se le reemplace por otro. Pero no ha de olvidarse que el verdadero postulado es la *identidad de las leyes naturales respecto de todos los sistemas cuyos movimientos relativos sean rectilíneos y uniformes*. La identidad de forma de la onda luminosa no es más que un caso particular de la *invariancia* de las ecuaciones que expresan aquellas leyes. El grupo de transformación de (x_1, x_2, x_3, t) a (x'_1, x'_2, x'_3, t') que haya de sustituir al de Galileo es necesario que satisfaga a este postulado con toda la generalidad con que viene formulado.

17. En la ecuación (16, 1) he supuesto la posibilidad de dos valores diferentes, c y c_1, para la velocidad de propagación de la luz relativamente a O y O'. En efecto, lo único que prueba el experimento de Michelson es la isotropía de los espacios de O y O' para esta traslación, y ello no exige realmente que c y c_1 sean idénticas. Sin embargo, ya hemos visto en el capítulo precedente que esta magnitud figura como constante en el sistema de ecuaciones fundamentales para todos los fenómenos electromagnéticos, de modo que se podrían imaginar experimentos que condujeran a la determinación numérica de c, y de este modo sería posible establecer el movimiento absoluto. Un intento en este sentido ha sido llevado a la práctica recientemente por Majorana, de cuyos

resultados se deduce, a juicio suyo, la constancia de c con independencia del observador. Sin embargo, se podrían también interpretar suponiendo que el valor de c_1 es diferente de c, pero idéntico cualquiera que sea la dirección del movimiento relativo, que, después de todo, es una hipótesis necesaria en virtud del experimento de Michelson.

Así, parece preferible fijar con Einstein como un segundo postulado *la constancia absoluta de* c *para todos los sistemas de referencia*.

Por consiguiente, en vez de suponer que la única velocidad común a dos observadores es $c = \infty$, como ya he dicho (§ 10) resulta que del grupo de Galileo, se adopta la hipótesis de que existe una velocidad *finita* que cumple con esta condición, y además se establece que dicha velocidad es la de propagación de las ondas luminosas. Sin duda, lo que caracterizará al grupo de transformación que se busca es el valor finito de la repetida velocidad común: que ella sea precisamente la de propagación de la luz es una cuestión de orden meramente empírico.

El grupo de transformación a que vengo aludiendo se puede escribir en la forma



$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= k(x_1 - Vt) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \\ t' &= k\left(t - \frac{V}{c^2}\, x_1\right) \\ k &= \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\}, \qquad (17,1)$$

adoptando para eje de las x_1 la misma dirección de $\vec{V}$. Lorentz fué el primero que llegó a establecerlo por un método de tanteos y aproximaciones sucesivas a la teoría de los fenómenos electromagnéticos que se producen en los cuerpos en movimiento: por esto recibe el nombre de grupo de Lorentz. Por su parte, Einstein encontró independientemente las mismas ecuaciones partiendo de los dos postulados, que juntos integran el *Principio restringido de relatividad:* no ofrece dificultad seguir este método deductivo para llegar hasta el grupo (17, 1); pero es más fácil comprobar que la sustitución de las coordenadas acentuadas x'_1, x'_2, x'_3, t' por los valores (17, 1) en la ecuación (16, 1) la convierte en una identidad, cuidado que dejo al lector.

18. Con este grupo de Lorentz para el cambio de coordenadas desaparecen las contradicciones que señalé en el anterior capítulo: el cuerpo de doctrina de las Ciencias físicas construído con su auxilio es coherente. Pero, como es lógico, surgen consecuen-



cias que chocan con los conceptos clásicos, algunos de los cuales, naturalmente aquellos a cuya eliminación nos resistimos más enérgicamente, pasaron ya a los fondos del conocimiento; allí donde es difícil discernir entre las nociones que nos vienen impuestas por nuestra misma organización mental, y que por ello no se hallarán nunca en conflicto con la realidad, y aquellos otros conceptos que constituyen el sedimento intelectual de la educación. Veamos algunos de estos casos de conflicto:

Naturalmente, la noción de cuerpo rígido, que era uno de los postulados que conducen al grupo de Galileo, desaparece aquí. Para establecer una correlación entre las formas de un mismo cuerpo apreciadas por un observador O′ ligado a él y por otro O que no participe de su movimiento, bastará que O y O′ determinen el lugar que en sus respectivos espacios ocupe el cuerpo en un instante fijo; esto es, la posición simultánea de todos sus puntos. Sin duda, como el cuerpo no se mueve relativamente a O′, la condición de simultaneidad no tiene interés para él, pero para O es absolutamente indispensable. Así, pues, en el caso de que el movimiento relativo sea uniforme y rectilíneo, la correlación de las formas se obtendrá por el grupo (17, 1), imponiendo a t un valor constante.

La distancia entre dos puntos a y b situados en una paralela al eje x_1 será para O′ la diferencia



$x'_1{}^{(a)} - x'_2{}^{(b)} = \delta_a^b x'_1$ y para O $x_1{}^{(a)} - x_1{}^{(b)} = \delta_a^b x_1$, entendiéndose que en este último caso, como he advertido, ambos valores de x_1 se refieren al mismo de t. Por consiguiente, la primera ecuación del grupo dará para la relación entre ambas magnitudes

$$x'^{(a)}_1 - x'^{(b)}_1 = k[x^{(a)}_1 - x^{(b)}_1] \quad \text{o} \quad \delta_a^b x'_1 = k\delta_a^b x_1$$

y los puntos *a* y *b* aparecerán a O más próximos que a O′. Al contrario, si los puntos *a* y *b* están sobre un plano normal a $\vec{V}$, la segunda y tercera ecuaciones (17, 1) demuestran que su distancia tiene igual valor para O y O′.

Según esto, O atribuye a todos los cuerpos una forma aplastada en el sentido del movimiento en relación con la que O′ aprecia, y esto en la proporción indicada por *k;* de modo que el aplastamiento aparente crecerá con V, y además, cuando $V = c$, el cuerpo se reduce a un plano. Dicho se está que existe una diferencia esencial entre este corolario del principio de relatividad y la hipótesis de la contracción real de Lorentz, y por ello no se puede hablar aquí de las deformaciones paralelas a dicha contracción que llevaron a pensar en fenómenos físicos que las denunciaran. El aplastamiento es una mera consecuencia del método adoptado para medir las distancias: la forma propia del cuerpo es la que aprecia el observador ligado a él.

Cuando invertimos los términos suponiendo que el



objeto medido está ligado a O en vez de O′, las determinaciones de O′ exigirán el requisito de simultaneidad, de modo que $x_1'^{(a)}$ y $x_1'^{(b)}$ se han de apreciar en el mismo instante t'; así la primera y cuarta de las ecuaciones (17, 1) darán

$$k[x_1'^{(a)} - x_1'^{(b)}] = [x_1^{(a)} - x_2^{(b)}]$$

o

$$k\delta_a^b x'_1 = \delta_a^b x_1,$$

de modo que para O′ el cuerpo estará aplastado como antes para O. Circunstancia es ésta de perfecto acuerdo, como no podía menos, con el principio de relatividad, puesto que ha de ser completamente imposible denunciar cuál es el sistema que se mueve.

19. Es fácil notar que el origen de la discordancia en la apreciación de la forma se encuentra en la falta de correspondencia entre los fenómenos simultáneos para O y O′: dos sucesos que gozan de esta condición para O no la tienen para O′. La razón de que así sea radica en que la simultaneidad, fuera de nuestra propia conciencia, significa sólo que los hechos acaecen cuando los relojes de los lugares respectivos señalan la misma hora; de modo que todo queda reducido, en último análisis, a su reglaje. Pero como ya dije (§ 8), el método que ha de seguirse a este fin hace que no pueda existir concordancia entre las apreciaciones de O y O′, cuando cada uno de ellos atribuye el movimiento al otro. Es esto lo que se traduce por la cuarta ecuación de (17, 1). Según



ella, cuando O registra las indicaciones que *en un mismo instante suyo* suministran los relojes de O′, situados frente a los puntos de coordenadas $x_1^{(a)}$, $x_1^{(b)}$, $x_1^{(c)}$... encuentra valores diferentes entre sí: los mismos que se deducen de (17, 1).

Consecuencia necesaria de esto es la marcha diferente de los relojes de O y O′. Supongamos, en efecto, que O mide con sus relojes un intervalo marcado por uno de los propios de O′. Para ello necesita leer las indicaciones que correspondan a los instantes $t'^{(\alpha)}$ y $t'^{(\beta)}$, que señalan el comienzo y final del intervalo $\delta_\alpha^\beta t'$, a cuyas indicaciones las llamaremos $t^{(\alpha)}$ y $t^{(\beta)}$. Puesto que $t'^{(\alpha)}$ y $t'^{(\beta)}$ son tiempos del mismo reloj $x_1'^{(\alpha)} = x_1'^{(\beta)}$ y las ecuaciones primera y cuarta de (17, 1) dan

$$k[t_1'^{(\beta)} - t_2'^{(\alpha)}] = t^{(\beta)} - t^{(\alpha)} \quad \text{o} \quad k\delta_\alpha^\beta t' = \delta_\alpha^\beta t,$$

de modo que la marcha de los relojes de O′ es más lenta que la correspondiente a los de O; esto es, los relojes en movimiento atrasan respecto de los que están en reposo. Como es lógico, también aquí existe una inversión completa de las cosas si suponemos que es el observador O′ quien aprecia en sus relojes un intervalo marcado por uno de los de O.

Aun es más interesante una segunda consecuencia que se presenta cuando se considera el intervalo entre sucesos que se producen en puntos diferentes



del espacio: entonces el intervalo en cuestión no sólo puede cambiar de valor, sino de signo. En efecto; si designamos por A y B los sucesos que corresponden a tiempos y lugares diferentes, la cuarta ecuación (17, 1) da

$$\delta_A^B t' = k\left(\delta_A^B t - \frac{V}{c^2}\,\delta_A^B x_1\right),$$

empleando la notación abreviada para intervalos y distancias que ya usé antes. El primer miembro será positivo, nulo, negativo, según que

$$\delta_A^B t \gtreqless \frac{V}{c^2}\,\delta_A^B x_1;$$

esto es, los sucesos A, B, se producen para O′ en el mismo orden que para O, son simultáneos u ocurren en orden inverso, según el signo que hemos de adoptar en la última relación.

Desde el punto de vista conceptual el último caso ofrece mayores dificultades y, por consiguiente, exige algún comentario. Si el orden de los sucesos A y B puede invertirse sin más que cambiar la velocidad del observador respecto del sistema en que aquéllos se producen, parece caber la posibilidad de que se invierta de igual modo la relación de causa a efecto que puede existir entre A y B. Esto sería completamente absurdo. Pero nótese que llamando *d* la distancia que la luz puede recorrer en el intervalo $\delta_A^B t$,



o sea $d = c\delta_A^B t$, se deduce de la última relación, para este caso que discutimos,

$$d < \frac{V}{c} \delta_A^B x_1.$$

Por consiguiente, una onda electromagnética que fuera engendrada en el mismo lugar y simultáneamente con A no alcanzaría el punto en que B se produce hasta después de ocurrido este suceso; de modo que no cabe pensar en una correlación de esta naturaleza entre A y B, y el absurdo señalado se evita con sólo admitir que cualquier otro procedimiento para ejercer acciones desde un punto sobre otro posee una velocidad de propagación, a lo más, igual a c. En efecto; es evidente que entonces A y B serían perfectamente independientes, y no existe razón lógica alguna que impida su inversión.

De aquí es notorio que al carácter de velocidad constante para todos los sistemas, que ya vimos posee c, se agrega ahora el de velocidad límite, imposible de rebasar. Esta última condición, puesto que se deriva de la misma forma del grupo de Lorentz, es una característica esencial del grupo. Que, además, dicha velocidad c sea la de propagación de la luz es, como ya dije, un resultado experimental, y de nuestros conocimientos relativos a este extremo lo único que se puede concluir es que, si existe algún fenómeno que se propague más rápidamente que aquélla, esto será en proporción bastante pequeña,

pues de otro modo el experimento de Michelson habría conducido a diferencias sensibles en la velocidad de los rayos AB y AB_1 (fig. 10).

20. Es evidente que, existiendo un límite finito para las velocidades, no es posible aplicar a dichas magnitudes la regla del paralelogramo cuando se quieren sumar o superponer dos de ellas. Supongamos un sistema que se mueve en el espacio con el observador O′: el vagón de ferrocarril a que he aludido anteriormente. Este observador mueve un objeto dentro del vagón con una velocidad $\overrightarrow{u'}$. Si queremos averiguar la velocidad que tiene dicho objeto para otro observador O_1 exterior al sistema que se mueve, la Ciencia clásica nos ha enseñado que bastará componer, según la indicada regla del paralelogramo, las dos velocidades $\overrightarrow{V}$ y $\overrightarrow{u'}$, cuya resultante será $\overrightarrow{u}$ (fig. 13). Para simplificar, consideremos el caso en que las direcciones de $\overrightarrow{V}$ y $\overrightarrow{u'}$ son idénticas: entonces

$$u = V \pm u', \qquad (20, 1)$$



Fig. 13

según que los sentidos de $\overrightarrow{V}$ y $\overrightarrow{u'}$ sean iguales u opuestos.

Pero la velocidad es una magnitud compleja a la cual se llega dividiendo una distancia por un intervalo de tiempo. En la Ciencia clásica, en virtud de los postulados que encierra el grupo de Galileo, las



distancias son idénticas, aprécielas O u O′, y otro tanto ocurre con los tiempos. Es, por tanto, natural que se llegue al resultado sencillo que corresponde a la ecuación (20, 1). Dicho se está que las cosas serán más complicadas cuando aquellos postulados se rechazan. Para hallar la relación que existe entre u' y u es necesario sustituir en el numerador y denominador de la ecuación que define u',

$$u' = \frac{\delta x'_1}{\delta t'},$$

los valores que el grupo de Lorentz da para dichas magnitudes, en función de las correspondientes de O, δx_1 y δt_1. Es fácil seguir la serie de transformaciones de cálculo que van a continuación:

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{\delta x'_1}{\delta t'} = \frac{k(\delta x_1 - \mathrm{V}\delta t)}{k\delta\left(t - \frac{\mathrm{V}}{c^2}\delta x_1\right)} \\ &= \frac{\delta x_1/\delta t - \mathrm{V}}{1 - \frac{\mathrm{V}}{c^2}\delta x_1/\delta t} \\ &= \frac{u - \mathrm{V}}{1 - \frac{\mathrm{V}u}{c^2}} \end{aligned}\right\}; \qquad (20, 2)$$

y de su primer y último miembros deducir

$$u = \frac{\mathrm{V} \pm u'}{1 \pm \frac{\mathrm{V}u'}{c^2}}, \qquad (20, 3)$$

que sustituirá a la (20, 1).



Nótese que si u' fuera igual a c, sea cual fuere V, u también sería c; esto traduce, como no podía ser menos, la constancia de la velocidad de la luz en el vacío para todos los sistemas.

Si se considera la velocidad de la luz en un cuerpo material, bastará colocar en la ecuación anterior $u = c_1$ y $u' = c'_1$; y entonces, despreciando cantidades de segundo orden en $\frac{V}{c}$, se reconoce sin dificultad que la ecuación (20, 2) se puede escribir en las formas sucesivas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{V + c'_1}{1 + \frac{Vc'_1}{c^2}} \\ &= (V + c'_1)\left(1 - \frac{Vc'_1}{c^2}\right) \\ &= c'_1 + V\left(1 - \frac{c'^2_1}{c^2}\right) \\ &= \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (20, 4)$$

Físicamente, el caso considerado es el de la propagación de la luz en un medio material que se mueve con velocidad V, para la cual ya se ha visto (§ 11) que el observador O, fijo, encuentra una velocidad idéntica a la (20, 4).

21. No insistiré más sobre otras consecuencias del principio de relatividad, en el orden geométrico



y cinemático, tan contrarias a las ideas vertidas por la Ciencia clásica como las precedentes, pero también como ellas de acuerdo con la experiencia. Vengamos ya a la Dinámica para analizar los cambios que en ella hayan de introducirse, conservando los postulados de Newton, pero sustituyendo el grupo de Galileo por el de Lorentz. Los cambios aludidos serán los que exija la inmutabilidad de las leyes naturales por efecto de la transformación efectuada utilizando el grupo citado; esto es, la identidad de forma para cualquier sistema de referencia.

Al esbozar en el primer capítulo la Mecánica de Newton, dije ya que su ley fundamental para la dinámica del punto es

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}, \qquad (21,1)$$

transformación inmediata de la ecuación

$$\vec{F} = \frac{d\vec{G}}{dt}, \qquad (21,2)$$

que traduce los dos primeros postulados, cuando se expresa la cantidad de movimiento por $m\,\vec{v}$. Agregando a (21, 1) el tercer postulado (igualdad de la acción y la reacción) se puede construir la dinámica de los sistemas.

Según esto (21, 1) tiene el carácter de una ley natural, de modo que *su forma* debiera conservarse al cambiar de sistema de referencia. Cuando era dado



suponer que el grupo de Galileo conviene para la ejecución del cambio, la invariancia de (21, 1) estaba asegurada suponiendo que $\vec{F}$ y m son magnitudes independientes del movimiento del observador que estudia la ley: expresan cualidades intrínsecas del sistema que se considera, en las que no puede influir el punto de vista desde el cual se les contemple.

Pero esto era así en atención a que el referido grupo no altera el valor de $\frac{d\vec{v}}{dt}$ en la transformación, circunstancia que no se cumple con el grupo de Lorentz, como es notorio sin más que señalar la diferencia de forma entre las ecuaciones (20, 1) y (20, 2). Si, pues, la ley natural ha de ser invariante en la transformación, como exige el principio de relatividad, la ecuación (21, 1) se ha de sustituir por otra, que también se deduzca de (21, 2), y como entre una y otra no existe más diferencia que la introducción de la hipótesis

$$\vec{G} = m\vec{v}, \qquad (21,3)$$

dicho se está que debe ser eliminada. Es menester encontrar para $\vec{G}$ una forma que permita la invariancia de las leyes fundamentales de la Dinámica con el grupo de Lorentz. Además, es indispensable que (21, 3) se pueda considerar como una primera aproximación, aplicable a todos los casos estudiados por la Mecánica, puesto que en los dominios de esta



ciencia no se halló nunca contradicción entre la teoría y la experiencia.

Imaginemos un sistema integrado por dos esferas elásticas, A y B, perfectamente pulimentadas, de igualdad absoluta en todos los respectos, en movimiento y sin que entre ellas se ejerza acción alguna más que en el instante del choque. Tampoco existen fuerzas exteriores, de modo que se trata de un sistema perfectamente aislado. Como el teorema de la conservación de la cantidad de movimiento es una consecuencia directa de los postulados fundamentales, sin intervención de la forma especial de $\vec{G}$, seguirá teniendo completa validez, de modo que

$$\vec{G}_A + \vec{G}_B = \text{const.};$$

o también: los cambios que el choque entre las esferas produzca en estas magnitudes serán numéricamente iguales:

$$\delta\vec{G}_A = \delta\vec{G}_B. \tag{21,4}$$

Supongamos ahora que la esfera A forma parte del sistema de referencia que he venido llamando O, y la B del que he designado con O'. Por ejemplo: A está situada en la estación del ferrocarril y B va transportada por el tren. Ateniéndonos a la Mecánica clásica, A y B tendrán la misma masa para los respectivos observadores, O y O', en virtud de su perfecta identidad. Además, supondremos que O y O' comunican a A y B velocidades iguales a un



número dado, dirigidas normalmente a $\vec{V}$, y que el experimento esté dispuesto en forma que se produzca un choque cuando la línea de los centros es también perpendicular a $\vec{V}$.

Tanto para O como para O′, los cambios de la cantidad de movimiento de A y B han de ser numéricamente iguales, en virtud de (21, 4), y por las condiciones del experimento se puede escribir

$$2m_A u_A = 2m_B u_B. \qquad (21, 5)$$

Señalo con subíndices las masas y velocidades de las dos esferas, a pesar de la igualdad de valores a que antes he aludido, porque dicha igualdad se establecía entre las magnitudes en cuestión apreciadas por sus respectivos observadores: m_A y u_A por O; m_B y u_B por O′. En cambio, la ecuación anterior ha de establecerla uno de ellos: O u O′.

Admitamos que sea O. Entre la velocidad u_B que él aprecia y la $u'_B = u_A$ que O′ comunicó a B, existe la diferencia que proviene del distinto valor de un mismo intervalo de tiempo para ambos observadores, puesto que los espacios normales a $\vec{V}$ son idénticos. Así

$$u'_B = \frac{l}{\delta t'} = \frac{l}{\delta t} k = u_B k;$$

y en definitiva

$$u_B = \frac{u_A}{k}.$$



Llevando este valor a (21, 5) y simplificando se halla inmediatamente

$$m_B = m_A k.$$

Teniendo en cuenta que A pertenece al observador fijo, esta relación viene a ser la que liga la masa de la esfera en movimiento con velocidad $\overrightarrow{V}$ al valor de dicha magnitud cuando se halla en reposo, consideración que lleva a escribirla en la forma general

$$m = m_0 k. \qquad (21, 6)$$

Las condiciones especialísimas del experimento sobre que he razonado se imponen con el exclusivo objeto de disminuir las dificultades matemáticas, sustituyendo las transformaciones de cálculo por las particularidades físicas. El resultado es, sin embargo, completamente general: si se han de conservar los postulados de Newton al reemplazar el grupo de Galileo por el de Lorentz, el coeficiente de la velocidad en $\overrightarrow{G}$ (*) deberá ser la función definida por la

(*) Aunque la ecuación (21, 6) se ha demostrado para el caso particular en que la velocidad de la esfera es la del sistema de referencia O′ respecto de O, es evidente que se puede aplicar a cualquier movimiento. En particular, las velocidades $\overrightarrow{u}$ que se suponen comunicadas a A y B han de ser pequeñas para que $\left(\frac{u}{c}\right)^2$ sea completamente despreciable; caso contrario, habría que hacer intervenir su influencia en las masas, y el razonamiento no conduciría fácilmente al resultado apetecido.



ecuación (21, 6). De otro modo, la cantidad de movimiento, en vez de contener m_0 y $\vec{V}$ en la forma sencilla (21, 3), se define por

$$\vec{G} = \frac{m}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \vec{V}. \qquad (21,7)$$

Es notorio que cuando $\frac{V}{c}$ disminuye (21, 7) tiende a (21, 3), y la identificación de ambas es posible, dentro de los errores de observación, para todos los casos que fueron objeto de estudio en la Mecánica clásica. Las mayores velocidades que esta ciencia conoció con precisión son tales que $\frac{V^2}{c^2}$ es del orden 10^{-8} (movimientos en el sistema planetario), y las diferencias numéricas que esto determina en los fenómenos observables están lejos de la precisión de los métodos de medida. Pero en el seno del átomo los electrones describen órbitas análogas a las de nuestros planetas con velocidades mucho mayores, y Sommerfeld ha demostrado con pleno rigor que para interpretar la estructura fina de las rayas espectrales es indispensable adoptar para $\vec{G}$ la fórmula (21, 7).

22. La definición (21, 7) de $\vec{G}$ podría haberse adoptado por la Mecánica clásica en vez de la (21, 3), puesto que esta última tiene el carácter de una mera



hipótesis; y entonces se habría constituído la ciencia en forma idéntica a la que deriva del principio de relatividad. Así, tal definición y el grupo de Lorentz son perfectamente equivalentes frente a los fenómenos mecánicos.

Claro está que en la Mecánica que así nace las leyes tienen formas más complejas que en la de Newton; apareciendo siempre estas últimas como formas límites de las primeras para el caso en que $\frac{v}{c}$ tienda a cero. Además, para todos los fenómenos conocidos bastó durante mucho tiempo este caso límite, y por ende fué perfectamente lógico no apartarse de él.

En particular la ley fundamental (21, 1) habrá de ser sustituída por la

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v},$$

que aún conviene transformar. En efecto: en su primer término figura el vector $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$, medida de la rapidez de variación de la velocidad; o sea la aceleración total, magnitud que en el caso general de una trayectoria curvilínea se puede descomponer en dos vectores: uno que coincide en dirección con $\vec{v}$ y cuyo valor es $\frac{dv}{dt}$, al cual se denomina *aceleración lon-*



gitudinal, y el otro, perpendicular a $\vec{v}$, de módulo $\frac{v^2}{r}$ (siendo r el radio de curvatura de la trayectoria), que se conoce con el nombre de *aceleración normal*. El primero lo representaré por $\vec{a_l}$ y el segundo por $\vec{a_t}$.

Separando las dos componentes indicados de $\vec{a}$ y reemplazando en vez de m y $\frac{dm}{dt}$ sus valores deducidos de (21, 6), la ecuación precedente se puede escribir en la forma

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{a_l} + \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \vec{a_t}. \quad (22, 1)$$

Es notorio que (22, 1) admite como límite (21, 1), supuesto que $\frac{v}{c}$ sea bastante pequeña para despreciar su cuadrado; puesto que entonces los coeficientes de $\vec{a_l}$ y $\vec{a_t}$ se reducen a la masa m_0, y por la definición de estas magnitudes

$$\vec{a_l} + \vec{a_t} = \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Fuera de este caso límite, la fuerza y la aceleración no tendrán, en general, la misma dirección, a diferencia de lo que ocurre en la Mecánica clásica. Aun, de los dos casos en que coinciden las direccio-



nes (1.°, movimiento rectilíneo, con lo cual $\overrightarrow{a_t} = o$, y 2.°, movimiento circular uniforme, que corresponde a $\overrightarrow{a_l} = o$), en uno de ellos la relación de la fuerza a la aceleración no es la masa, ni siquiera con el concepto amplio que representa la ecuación (21, 6). No obstante, se acostumbra a designar los coeficientes de $\overrightarrow{a_l}$ y $\overrightarrow{a_t}$ en (22, 1) con los nombres de *masa longitudinal* y *masa transversal*, de las cuales esta última es la misma a que se refiere (21, 6).

Las expresiones de estas dos masas, m_l y m_t, en función de $\frac{v}{c}$ se han podido confirmar experimentalmente. La primera mediante ciertas relaciones establecidas por Bohr, para la pérdida de energía que una partícula β de las substancias radiactivas sufre al penetrar en la materia, y la segunda por experimentos directos bastante numerosos realizados con electrones negativos, dotados de un rápido movimiento $\left(\frac{v}{c}\right.$ comprendido entre 0,2 y 0,8). La confirmación experimental en este último caso es mucho más perfecta que en el primero, y de su valor puede juzgarse por la fig. 14, donde los puntos marcados corresponden a los experimentos de Guye y de Neumann, y la curva traduce la expresión teórica (21, 6).

Dicho se está que esta confirmación de las funciones que definen las masas aludidas constituyen buenos argumentos en pro del grupo de Lorentz, pues,



según ya dije, él impuso la nueva expresión de $\overrightarrow{G}$, de donde todo lo dicho deriva.

Notemos aún que si (22,1) ha de conservar el carácter de ley natural que poseía (21,6) en la Mecánica clásica, el principio de relatividad exige que su forma no cambie cuando se pasa del sistema de referencia O al O′. Esto obliga a prescindir del carácter

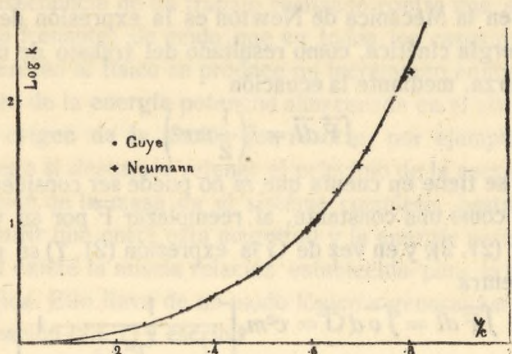


Fig. 14

de magnitud invariante que tenía en aquella ciencia la fuerza $\overrightarrow{F}$. Su valor numérico cambiará con el observador que estudia sus efectos, y esto de modo que las ecuaciones de transformación sean idénticas que las correspondientes al segundo miembro de (22,1), donde sólo figuran la constante m_0 y magnitudes de carácter cinemático que se ha visto cómo se transforman al variar el sistema de referencia.



Seguir más adelante en este orden sería rebasar los límites de este libro; sólo agregaré, porque interesa para futuros desarrollos, que en el caso de una fuerza aplicada a un punto que permanece en reposo respecto del sistema en movimiento O′, se obtiene el grupo

$$F'_1 = F_1, \quad F'_2 = kF_2, \quad F'_3 = kF_3. \quad (22, 2)$$

23. Otra consecuencia de la forma adoptada para $\vec{G}$ en la Mecánica de Newton es la expresión de la energía cinética, como resultado del trabajo de una fuerza, mediante la ecuación

$$\int \vec{F}\,\vec{dl} = \delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right).$$

Si se tiene en cuenta que m no puede ser considerada como una constante, al reemplazar $\vec{F}$ por su valor (21, 2), y en vez de $\vec{G}$ la expresión (21, 7) se encuentra

$$\int \vec{F}\,\vec{dl} = \int \vec{v}\,d\vec{G} = c^2 m_0 \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1\right],$$

para llegar a cuyo resultado final se supone la integración hecha entre $v = 0$ y un valor cualquiera de dicha magnitud. Así, en vez de la expresión clásica de la energía cinética $\frac{1}{2}m_0 v^2$, se obtiene

$$T = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1\right] = c^2(m - m_0),$$



de la cual es aquélla una primera aproximación. Traducida al lenguaje corriente, dice que la energía cinética comunicada al cuerpo es equivalente a un incremento de su masa.

Naturalmente, la pérdida de energía cinética irá también acompañada de una disminución de la masa. Pero siempre que existe destrucción de T, ello es consecuencia de un trabajo realizado contra una acción frenante; de modo que en todos los casos que interesan al físico se produce un incremento equivalente de la energía potencial almacenada en el sistema origen de la acción (un resorte, por ejemplo). Luego si deseamos retener el principio de la conservación de la masa en el sistema completo, bastará admitir que entre esta magnitud y la energía potencial existe la misma relación establecida para la cinética. Ello lleva de un modo lógico a generalizar la ecuación (23, 1) y escribir

$$\Delta m = \frac{\Delta \mathcal{E}}{c^2}, \qquad (23, 2)$$

sea cual fuere la naturaleza de la energía $\mathcal{E}$.

Sin duda, este modo de retener la ley de Lavoisier la reduce al principio de conservación de la energía, circunstancia que, lejos de ser un reproche, se puede alegar como una ventaja para la nueva teoría. En principio se trata de un corolario de ésta que puede someterse a la comprobación experimen-



tal directa; pero la presencia de c^2 en el denominador de (23, 2) pone estos experimentos fuera del alcance de nuestros medios en la inmensa mayoría de los casos. Se explica así como aun en los trabajos cuidadosos de Landolt no se ha encontrado en definitiva ninguna variación apreciable. Baste observar que una de las reacciones químicas más violentas, la combinación del hidrógeno y el oxígeno para formar el vapor de agua, va acompañada de una pérdida de energía por gramo igual a $3{,}24 \times 10^3$ calorías o $1{,}35 \times 10^{11}$ erg., a las cuales, según la ecuación (23, 2) corresponden $1{,}5 \times 10^{-10}$ gr. No obstante, para ser completamente rigorosos en el enunciado de la ley de Lavoisier sería menester, no sólo asegurarse contra la pérdida de substancias gaseosas, como ya hacía el químico francés en sus experimentos clásicos, sino retener toda la energía radiante que puede producirse.

Los cambios de energía son más violentos en los procesos radiactivos. El Ur se transforma en Ra, pasando por un cierto número de elementos intermedios, y en cada una de estas transmutaciones se emite una partícula α o una β y radiación γ simultáneamente, emisiones que suponen la pérdida de ciertas cantidades de energía, en la hipótesis de que su origen esté en el seno del propio átomo y no venga del exterior; cual sucedería si se admitiese, con Perrin, que el proceso radiactivo se produce gracias a



la absorción de una radiación de frecuencia específica. Análogamente, el Ra se convierte en Pb también mediante una serie de saltos análogos a los anteriores. Limitándonos a los rayos α, la energía total representada por ellos en la primera transformación es $2,12 \times 10^{-5}$ erg. por átomo, o sea $5,71 \times 10^{16}$ por gramo de Ra; para la segunda, las mismas magnitudes tienen por valor, respectivamente, $4,90 \times 10^{-5}$ y $13,2 \times 10^{16}$. De unas y otras se deduce que los pesos atómicos del Ra y del Ra-Pb deben sufrir una disminución de 0,0063 y 0,0147 por 100 en virtud de esta causa, si se les compara con los valores obtenidos restando de las masas atómicas del Ur y el Ra, respectivamente, 3 y 5 átomos de He, o sean 12.00 y 20.00 unidades. La precisión de las actuales determinaciones de los pesos atómicos de los elementos precitados no basta para contrastar aquellas predicciones teóricas; pero es innegable que se trata de magnitudes ya en el mismo dintel de nuestras posibilidades experimentales. Conviene además advertir a este respecto que, si bien la comprobación de aquella presunción teórica sería argumento de peso en pro de la ecuación (23, 2), la demostración experimental de que la diferencia de los pesos atómicos es exactamente igual a la masa perdida por efecto de la radiación α, podría interpretarse admitiendo que el origen de la energía de los rayos α, β, y γ se encuentra en una forma de ener-



gía de frecuencia muy pequeña absorbida por los átomos radiactivos, según ya dije que Perrin pretende.

Dicho se está que, aun admitiendo la referida ecuación (23, 2) que liga los cambios de energía con los de masa, no se desprende como consecuencia necesaria que toda la masa se reduzca a una mera consecuencia de la energía acumulada en el volumen por ella ocupado. Para pasar de (23, 2) a

$$m = \frac{\mathcal{E}}{c^2}, \qquad (23,3)$$

que es la traducción analítica de dicha idea, es menester una nueva hipótesis que significa la anulación de la constante introducida al integrar (23, 2). Innegablemente la hipótesis es lógica, pues supone una economía de pensamiento; pero no pasa de ser una hipótesis. Importa además notar que no se trata de una concepción que se opone a aquel otro corolario de la ciencia moderna, según el cual la masa de los cuerpos es de origen electromagnético. Esto último sólo supone una concreción más de (23, 3), pues equivale a especificar la naturaleza de $\mathcal{E}$.

Diré aún que aquella necesidad mental que llevó a crear el éter como soporte material de la energía y la cantidad de movimiento de la radiación electromagnética, halla plena satisfacción aquí sin introducir tal medio universal, puesto que la energía supone



una masa y se propaga a través del espacio vacío a la manera de las partículas luminosas de Newton.

24. Al trazar el bosquejo de la Mecánica clásica señalé (§ 5) el gran interés que ofrece el principio de Hamilton, que fija el proceso según el cual un sistema pasa de un estado determinado, correspondiente al tiempo t_0, a otro también definido que adquiere en el tiempo t_1 mediante la condición

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{H}dt = 0,$$

donde $\mathrm{H} = \mathrm{T} - \mathrm{W}$. En la nueva ciencia existe un principio equivalente, cuya única diferencia con el anterior estriba en que no figura en H la energía cinética propiamente dicha, sino la función

$$\mathrm{T}' = \Sigma m v^2 - \mathrm{T} = \Sigma m_0 c^2 \left[1 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

frecuentemente llamada función recíproca de T. Notoriamente, en primera aproximación, T′ se reduce a $\frac{1}{2} \Sigma m_0 v^2$, y ello prueba que el principio de la Mecánica clásica es un caso particular de éste, que atribuye a H el valor T′—W.

25. En este camino que vamos siguiendo corresponde ahora ocuparnos de la aplicación del principio de relatividad a los fenómenos electromagnéticos. Este principio requiere, según he repetido frecuen-



temente, que las leyes naturales conserven su forma sea cual fuere el sistema de referencia; estúdielas el observador O' o el O. Tal afirmación no significa que los valores actuales de las diversas magnitudes medidas por O y O' sean idénticos, ni siquiera que ambos perciban simultáneamente los mismos fenómenos. Quiere decir únicamente que la correlación entre ellos se produce de idéntico modo para ambos.

Así es notorio ateniéndonos a un caso concreto. Imaginemos un cuerpo electrizado en reposo en nuestro laboratorio. Evidentemente, el campo que le envuelve será puramente eléctrico juzgado por nosotros mismos. Pero si admitimos la presencia de un observador extraterrestre que percibe la existencia de aquel cuerpo y estudia los fenómenos que de él dependen, hallará, a más de un campo eléctrico, otro magnético. Lo que ha de conservarse idéntico para unos y otros son las leyes que rigen los fenómenos provocados por las acciones mutuas de las cargas eléctricas; por ejemplo, la relación de dependencia entre las fuerzas mecánicas que actúan sobre los cuerpos cargados y los campos eléctrico y magnéticos que de las propias cargas proceden.

Sin duda, la única forma de asegurar la invariancia de las ecuaciones que definen las leyes naturales al cambiar de sistema de referencia, no obstante el diferente aspecto que los fenómenos ofrecerán para unos y otros observadores, es la existencia de un



grupo de transformación para los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$. El mismo caso sencillo recordado hace un momento, nos permite prever la forma de las ecuaciones.

En primer término, la carga eléctrica del cuerpo a que me he referido en el caso en cuestión es un invariante en el cambio de sistema de referencia, puesto que de una parte la ley experimental de la conservación de las cargas hace que aquélla no altere de valor cuando O pasa del estado de reposo al de movimiento, y de otra para O′ los fenómenos han de ocurrir de modo idéntico que para O en el estado de reposo, en virtud del principio mismo de relatividad. Así,

$$e' = e \qquad (25, 1)$$

En segundo término, para nosotros, arrastrados por la tierra en su movimiento, la carga eléctrica no producirá más campo que el electrostático de componentes E'_1, E'_2, E'_3. Para el observador extraterrestre habrá también un campo eléctrico $\vec{E}$; pero además un campo magnético provocado por el movimiento del $\vec{E}$ con velocidad V, según (10, 2). Supongamos ahora que O y O′ estudian la acción que estos campos determinan sobre un péndulo eléctrico de carga *e* ligado al laboratorio, y situado en cualquier punto del plano normal a $\vec{V}$: según (22, 2), entre las componentes para O′ y O de estas fuerzas habrá la relación

$$F'_1 = F_1, \quad F'_2 = kF_2, \quad F'_3 = kF_3. \qquad (25, 2)$$



De otra parte, y en atención a (10, 4),

$$F'_1 = e'E'_1, \quad F'_2 = e'E'_2, \quad F'_3 = e'E'_3;$$

$$F_1 = eE_1, \quad F_2 = eE_2 - \frac{eV}{c} H_3, \quad F_3 = eE_3 + \frac{eV}{c} H_2.$$

Sustituyendo estos valores de las componentes de $\vec{F}$ y $\vec{F'}$ en (25, 2), se deduce inmediatamente el grupo

$$\left.\begin{aligned} E'_1 &= E_1 \\ E'_2 &= k(E_2 - \frac{V}{c} H_3) \\ E'_3 &= k(E_3 + \frac{V}{c} H_2) \end{aligned}\right\}. \qquad (25, 3)$$

Por un razonamiento análogo, sólo que aplicando la atención a un solenoide de nuestro laboratorio, en vez de un cuerpo electrizado, obtendremos un segundo grupo de transformación que da los valores de H'_1, H'_2, H'_3

$$\left.\begin{aligned} H'_1 &= H_1 \\ H'_2 &= k(H_2 + \frac{V}{c} E_3) \\ H'_3 &= k(H_3 - \frac{V}{c} E_2) \end{aligned}\right\}. \qquad (25, 4)$$

Utilizando (25, 3) y (25, 4) para pasar de los campos que O percibe a los que O′ puede denunciar, o recíprocamente, las leyes naturales adoptan idéntica forma, sea cual fuere el observador que las contemple, como hemos dicho tantas veces requiera el principio de relatividad. El razonamiento mismo



de que me he servido para llegar a ellas es una garantía de que así debe ocurrir; pero se obtiene la plena confirmación de la exactitud de la anterior proposición aplicando dichas ecuaciones, juntamente con el grupo de Lorentz, para transformar las fundamentales del campo electromagnético.

De tal grupo, escrito en la forma

$$x'_1 = k(x_1 - \frac{V}{c} x_4);$$
$$x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3;$$
$$x'_4 = k(x_4 - \frac{V}{c} x_1);$$

por la sustitución de x_4 en vez de ct, se obtiene para los símbolos de derivación

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = k \frac{\partial}{\partial x'_1} - k \frac{V}{c} \frac{\partial}{\partial x'_4};$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x'_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x'_3};$$
$$\frac{\partial}{\partial x_4} = k \frac{\partial}{\partial x'_4} - k \frac{V}{c} \frac{\partial}{\partial x'_1};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = k^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2_1} - k^2 \frac{V^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2_4};$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2_2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2_3};$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = k^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2_4} - k^2 \frac{V^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2_1}.$$

8



El primer grupo en combinación con los (25, 3) y (25, 4), permite demostrar que las condiciones

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial h_j} = 0 \qquad (25, 5)$$

imponen la exactitud de ecuaciones de la misma forma entre las componentes de los campos para el sistema O'.

Por otra parte, es consecuencia inmediata del segundo grupo que el operador

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

es por sí mismo invariante; esto es, no altera la naturaleza de la magnitud a que se aplique. Con ello, las ecuaciones

$$C_i = -\square P_i$$

tendrán igual forma en el sistema acentuado, puesto que los vectores de componentes C_i y P_i se transforman de igual modo.



CAPÍTULO IV

Las nociones de espacio y tiempo y el Universo de Minkowski

26. Heterogeneidad de las nociones de espacio y tiempo. El Universo de Minkowski.—27. Su aplicación a la ciencia clásica. Los conceptos de Espacio y Universo.—28. La transformación de Galileo en el Universo.—29. El Universo de Minkowski para el grupo de Lorentz.—30. Generalización a ejes cualesquiera. 31. Hodócronas, reglas, planos y espacios: Universos de diferentes órdenes.—32. Empleo del tiempo imaginario para conservar la geometría de Euclides en el Universo.—33. Intervalo elemental: longitud y tiempo propios.—34. La ley de inercia.

26. El grupo de Lorentz, estudiado en el capítulo precedente, establece una conexión entre el espacio y el tiempo que ya hemos visto choca fundamentalmente con las nociones suministradas por la ciencia clásica y con nuestros hábitos mentales, seguramente porque estos últimos son el resultado de una educación guiada por aquélla. Para juzgar con sana crítica el valor de dicha contradicción es indispensa-



ble fijar hasta dónde la independencia de las nociones de espacio y tiempo, a primera vista tan lógica, puede ser el fruto del proceso histórico seguido en la acumulación del caudal de nuestros conocimientos.

Parece absolutamente innegable que la conciencia de sucesión de los fenómenos, que engendra la noción de tiempo, responde a algo inconfundible con la localización relativa de los mismos, de donde nace el concepto de espacio: los adverbios *antes, ahora* y *después,* que vienen a fijar aquella sucesión, son inconfundibles con los *aquí* y *allí*, que establecen la posición respecto al observador. Sin duda, para avanzar el primer paso en la construcción de una teoría de los fenómenos naturales se hace indispensable completar estos vagos conceptos intuitivos creando una métrica que permita numerar los instantes consecutivos de tiempo, estableciendo la noción de *duraciones* iguales, y fijar la posición de un punto en el espacio, mediante la introducción de la noción de *distancia*. La posibilidad de hacerlo es, pues, postulado indispensable para la existencia de la Filosofía natural.

Pero la métrica concreta que va contenida en el grupo de Galileo pretende poseer un carácter absoluto, siendo la única aplicable al Universo entero. Esto es: sea cual fuere el observador que contempla los fenómenos, la imagen que del Universo se forme será idéntica. Podríamos decir que los aspectos que



ofrece la Naturaleza a dos observadores distintos son perfectamente congruentes, a la manera como lo son dos planos de una misma región levantados por dos topógrafos utilizando dos bases diferentes. Es innegable que esta concepción es la más sencilla que podemos formarnos; pero no se vislumbra ninguna razón lógica que la imponga. Sólo cabe la contrastación experimental de los resultados a que se llegue partiendo de ellas, y ya hemos visto que precisamente por este camino se adquiere la convicción de que sólo en una primera aproximación al conocimiento de los fenómenos naturales cabe conservarla.

Fuera de la ciencia así construída queda un cierto número de experimentos, que al tratar de incluirlos en ella conducen a contradicciones irresolubles. Son pocos, pero el rigor y la seguridad de sus resultados es tal, que pesan tanto como el restante caudal de nuestro conocimiento experimental.

Ha sido indispensable reconstruir todo el edificio del saber con el fin de que dichos resultados encuentren en él su lugar sin contradecirse mutuamente, y ello ha exigido renunciar a la concepción sencilla representada por el grupo de Galileo. El de Lorentz que le reemplaza supone una métrica del Universo tal, que las duraciones y las distancias pierden su valor absoluto y dependen del observador a que se refieren.

Estas ecúaciones de Lorentz, con la íntima cone-



xión que establecen entre el espacio y el tiempo, sugieren inmediatamente la consideración de este último como una dimensión que se agrega a las tres características del espacio ordinario para constituir la variedad cuadridimensional a que Minkowski llamó Universo. Pero es menester guardarse de imaginar que este Universo es isótropo, a la manera como lo son el espacio ordinario, nacido agregando una dimensión más al plano, y este último, obtenido cuando se agrega la segunda dimensión a la recta. Por ello el nombre de *Universo* dado a la variedad en cuestión, expresa la idea justa que de ella debemos formarnos.

La disposición espacial de los sucesos corresponde a un solo instante en la vida de la Naturaleza: es una sección hecha en su perenne evolucionar, y quien no conociera más que esta sección se formaría una imagen incompleta del mundo. Para comprender la Naturaleza, y por ende estar capacitados para formular una teoría científica que la interprete, es indispensable seguir su evolución en el tiempo, comparar disposiciones espaciales sucesivas, percibir la Naturaleza en una duración o lapso de tiempo.

Esta necesidad era bien conocida de la ciencia clásica. La teoría de un sistema mecánico no se puede formular con el solo dato de la disposición de los puntos materiales que lo integran y el conocimiento de las acciones que entre ellos se ejercen en un ins-

tante determinado. Se necesitan, además, las velocidades de que se hallan animados, las cuales, como cambios que son de aquellas posiciones cuando el tiempo avanza, suponen la continuidad de la percepción en un intervalo de tiempo, por pequeño que éste sea. Y otro tanto puede aplicarse a cualquier otro sistema físico: en las ecuaciones del campo electromagnético, por ejemplo, interviene el movimiento de las líneas de fuerza.

Dicho se está que la percepción de la Naturaleza en un lapso de tiempo, que acabo de decir es indispensable para formular su teoría, exige poner a contribución la memoria para conectar las sucesivas disposiciones espaciales de los elementos que le integran, y en su auxilio ha acudido siempre la ciencia mediante la construcción de diagramas geométricos, en los cuales el tiempo figura como una coordenada, juntamente con las dimensiones del espacio. De este modo se sustituye al aspecto constantemente cambiante de la Naturaleza una representación estática, que es el Universo de Minkowski. Si a la ciencia relativista corresponde el mérito de haber comprendido la trascendencia de esta noción, es a consecuencia de la mayor complejidad que en dicho Universo crea el grupo de Lorentz.

27. Insistiré un poco sobre los diagramas clásicos para un mejor esclarecimiento de las ideas precedentes. Comenzaré por el movimiento de un pun-



to A sobre una recta: su posición instantánea se fija por la distancia a un origen O, que comenzaré admitiendo está en reposo. Los estados sucesivos se representan por un diagrama plano cuyas coordenadas son el tiempo t, y las distancias x_1 a O. Todas las particularidades del movimiento están contenidas en su ecuación

$$x_1 = f(t),$$

que podemos construir elevando por cada una de las posiciones que ocupa el punto una paralela al eje de los tiempos igual al valor correspondiente de t.

Si el movimiento se produce en un plano, son necesarias dos coordenadas para fijar la posición instantánea, y el diagrama tendrá tres dimensiones, puesto que ha de agregarse la representación del tiempo. La ley del movimiento se traducirá por la curva cuyas ecuaciones son

$$x_1 = f_1(t), \qquad x_2 = f_1(t),$$

la cual se proyecta sobre el plano (X_1X_2) según la trayectoria que el punto describe. También se puede decir que la indicada gráfica es el lugar geométrico de los extremos de las paralelas al eje de los tiempos, trazadas por cada uno de los puntos de la trayectoria, con una longitud igual al valor de t en el instante en que el móvil pasa por él.

Cuando el movimiento se produce en el espacio no existe posibilidad de trazar el diagrama, porque



no disponemos de una dimensión más para el tiempo; pero nada se opone a que se generalice el lenguaje que nace con los diagramas más sencillos anteriores, y así se diga que la ley del movimiento está representada en un espacio de cuatro dimensiones cuya completa descripción puede hacerse parafraseando lo dicho en el caso precedente.

Es notorio que este espacio cuadridimensional no existe como una realidad comparable al de tres, teatro de los fenómenos que percibimos. Es más exacto designarle por el nombre más vago de *variedad*, utilizado en el análisis matemático, y precisamente por la conveniencia de evitar la posible confusión señalada, es acierto innegable la elección hecha por Minkowski del nombre *Universo*. Y aunque el malogrado matemático lo circunscribía a la variedad cuadridimensional a que vengo refiriéndome, nada se opone, y hasta parece de obligada lógica, extenderle a los diagramas de tres y dos dimensiones que traducen los fenómenos de un mundo plano o rectilíneo.

Pero no es ocioso advertir que nada de lo dicho precedentemente afecta a la posibilidad de que un ser dotado de elementos de percepción superiores a los nuestros pueda llegar a conocer en el espacio nuevas dimensiones que no soñamos. En este punto sólo cabe discutir la posibilidad o imposibilidad de su existencia, cuestión que obliga a recurrir a razo-



namientos que trascienden de la Filosofía Natural. Unicamente diré a este propósito que la aparente falta en la Naturaleza de seres reales cuyos órganos de percepción le obliguen a considerar el mundo en que viven como de una o dos dimensiones, puede considerarse motivo fundado para la presunción, rayana en la certidumbre, de que existe una perfecta adecuación entre los medios de conocer y la realidad exterior, de suerte que el espacio probablemente no tiene capacidad para más dimensiones de las tres con que se nos presenta.

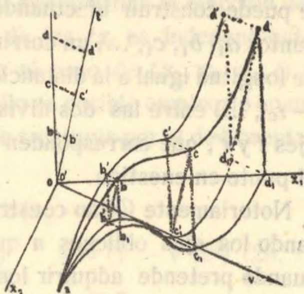
Así, una vez más, el Universo cuadridimensional de Minkowski no es un *espacio*, sino una variedad en que encuentra cabida simultánea, estática (dando a esta palabra una significación más amplia de la que le es propia), la Naturaleza en su evolución permanente: la variedad que habría de usar una inteligencia omnipresente para esquematizar el mundo de los fenómenos.

28. Volviendo a los diagramas, planteemos el problema que consiste en averiguar qué noticia puede adquirir el observador O, que los ha trazado, respecto al conocimiento que de su mundo posee otro observador O′ dotado de un movimiento uniforme y rectilíneo. La solución se logra transportando las ecuaciones en que O traduce las leyes por él descubiertas al Universo propio de O′, mediante el grupo de transformación que liga las diferen-



tes coordenadas y el tiempo del uno con las del otro.

En la ciencia clásica este grupo es el de Galileo, según el cual la única de estas variedades espaciales y de tiempo que sufre alteración al pasar de O a O′, es la que mide las distancias paralelamente a la dirección del movimiento relativo de O′ respecto de O. Y ella es tal, que los nuevos valores se deducen de los antiguos restándoles el espacio V*t* que ha recorrido O′; o sea que habrán de contarse desde los puntos de una recta contenida en el plano definido por la trayectoria del movimiento de O′ y el eje *t*, pasando por el origen de coordenadas y formando con *t* un ángulo cuya tangente trigonométrica es V. Según esto, los ejes a los cuales habría de referirse el diagrama para resolver el problema arriba planteado, son los mismos de antes para x_1, x_2 y x_3, y la recta indicada para el tiempo.


Fig. 15

Consideremos, para concretar en un ejemplo, el caso del movimiento de un punto A en un plano, estudiado por O y O′. La figura 15 se refiere al Universo de O, y en él ya dije cómo está construída la

curva (abc ...), que representa la ley del movimiento, cuya trayectoria es (a_1, b_1, c_1 ...). La del punto O′ es la recta OV, y los nuevos ejes serían, según lo que hemos visto significa el grupo de Galileo, las mismas rectas OX_1 y OX_2 y la Ot para los tiempos. Por consiguiente, el valor de t' para cada uno de los puntos de la curva (abc ...) continúa siendo el mismo de t; o dicho de otro modo, la escala de los tiempos en su nuevo eje se obtendrá transportando la del antiguo por un haz de planos paralelos al (X_1 X_2). En cambio, las escalas en OX_1 y OX_2 se alterarán, y con ellas la trayectoria en el plano, puesto que los puntos a_1, b_1, c_1, ... han de proyectarse por rectas paralelas a Ot', de modo que vienen a ocupar las posiciones a'_1, b'_1, c'_1, ... Directamente se le puede construir efectuando para cada uno de los puntos a_1, b_1, c_1, ..., un corrimiento paralelo a OV y de longitud igual a la distancia ($t_a - t_{a'}, t_b - t_{b'}, t_c - t_{c'}$, ...) entre las dos divisiones homólogas de los ejes t y t', que corresponden al instante de paso por el punto en cuestión.

Notoriamente O′ no construiría su diagrama adoptando los ejes oblicuos a que se ve conducido O cuando pretende adquirir los conocimientos de O′. Para pasar de este diagrama de O al de O′ es suficiente una deformación plenamente definida por el paso del eje t' a la posición normal, conservándose las divisiones de su escala sobre rectas paralelas a



la variedad que definen las restantes coordenadas: en el ejemplo que venía considerando, sobre rectas paralelas al plano (X_1, X_2).

Según se ve, el plano (tV) juega un papel fundamental en estos problemas que se refieren a la relación entre los conocimientos de O y de O′; y como, por otra parte, la geometría nos enseña la perfecta equivalencia de todos los sistemas de ejes para cuanto afecta a la configuración de los puntos del espacio, es perfectamente posible elegirlos de suerte que uno, el X_1, por ejemplo, coincida con la recta OV. Entonces, en un diagrama plano estarán todos los elementos necesarios para la resolución de aquellos problemas, y precisamente a esta elección responde el grupo de Galileo (6, 2).

29. El razonamiento que justifica la elección del plano (tV) como plano de las tx_1 es independiente del grupo utilizado para el paso de (x_1, x_2, x_3, t) a (x'_1, x'_2, x'_3, t'), y por ello es posible emplearlo cuando el grupo de Galileo se sustituye por el de Lorentz:

$$x'_1 = k\,(x_1 - Vt)$$
$$t' = k\,(t - V/c^2 x) \qquad k = (1 - V^2/c^2) \quad (29, 1)$$
$$x'_2 = x_2, \qquad x'_3 = x_3.$$

El eje t' continúa siendo aquí la recta que en el plano (tx_1) forma con t el ángulo con tangente trigo-



nométrica V, puesto que su ecuación en el sistema de O es, como antes,

$$x_1 - Vt = 0;$$

pero el nuevo eje X'_1 no se confunde con el X_1, sino que será la recta de ecuación

$$t - V/c^2 x_1 = 0,$$

de modo que formará con él un ángulo de tangente trigonométrica V/c^2, mucho menor que el de t y t', en atención al enorme valor de $c^2 = 9 \times 10^{20}$. En el caso de que O′ no se mueva con velocidades muy superiores a las más grandes que conoce la Mecánica, aun la celeste, dicho ángulo es tan pequeño que escapa a nuestros medios de percepción, y con mayor motivo a la capacidad representativa del dibujo. Tomando para V 100 k.s., o sea más de tres veces la velocidad de traslación de la Tierra, la tangente del ángulo X'_1OX_1 valdrá aproximadamente 10^{-14}, de modo que para lograr una separación entre X'_1 y X_1 del orden del milímetro sería menester alejarse del origen 100 millones de kilómetros, o sea unos dos tercios del radio de la órbita terrestre. Aquí es notoria la perfecta equivalencia de los grupos de Galileo y de Lorentz, siempre que no salgamos del dominio de la Mecánica clásica, siquiera aquél aparezca ahora sólo como una primera aproximación a la realidad.



El haz de rectas paralelas a X_1 que transportaba la escala de t a t', y que es el único sistema de líneas que en el grupo de Galileo se conserva invariante, puesto que sus ecuaciones son

$$t = t' = \lambda,$$

donde λ es una constante cualquiera, se sustituirá ahora por las curvas de la familia

$$x_1^2 - c^2t^2 = x'^2_1 - c^2t'^2 = \pm \lambda^2. \qquad (29, 2)$$

Tales curvas son hipérbolas que tienen por diámetros conjugados las parejas de ejes tales como (tX_1) y $(t'X'_1)$, y cuyas asíntotas son las rectas

$$x_1 \pm ct = 0. \qquad (29, 3)$$

Así el ángulo que forman estas últimas con el eje X_1 tiene por tangente $\frac{1}{c} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-10}$, y la separación de un milímetro entre una de ellas y el eje X_1 requiere alejarse de O unos 30×10^4 kilómetros. Entonces las hipérbolas que corresponden a los valores positivos de λ^2, se confunden prácticamente con un haz de paralelas a X_1.

Prácticamente estamos de nuevo en el grupo de Galileo; pero es de notar que el resultado de ahora es una consecuencia de la unidad con que medimos el tiempo. El segundo, que se nos antoja un intervalo casi despreciable en la mayor parte de los asuntos



de la vida, aún más pequeño respecto del tiempo que lo es el centímetro relativamente a las distancias, es, sin embargo, verdaderamente gigante cuando lo confrontamos con los fenómenos naturales, sin que necesitemos abandonar para esta apreciación el punto de vista humano. Si consideramos las moléculas que caben alineadas en un centímetro, su número resulta ser sólo de unos 100 millones. En cambio, en el intervalo de un segundo de tiempo caben algunos millares de billones de vibraciones correspondientes a la luz que impresiona nuestra retina, entidades estas vibraciones más cercanas a nosotros que las propias moléculas, puesto que la Naturaleza nos ha dado medios para distinguir diferencias entre las primeras, bastante más delicadas que las apreciables entre las segundas. En último término, esta desproporción en los valores de las unidades es el reflejo de la distinta sensibilidad de nuestros medios de percibir las magnitudes espaciales y temporales. Para las primeras disponemos de órganos delicados: pudiera decirse cuantitativos. De las segundas sólo tenemos una noción confusa, en cierto modo indirecta, por comparación con estados de conciencia.

La forma del grupo de Lorentz suministra una guía segura para restablecer la comparabilidad de las unidades, pues si reemplazamos el segundo por $\frac{1}{c}$, que significa tanto como tomar para medida de



los intervalos de tiempo el recorrido hecho por la luz durante ellos, necesitamos reemplazar la antigua variable t por $x_4 = ct$, con lo cual las dos primeras ecuaciones del grupo toman la forma más simétrica

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= k\,(x_1 - \beta x_4) \\ x'_4 &= k\,(x_4 - \beta x_1) \end{aligned}\right\} \qquad (29,\ 4)$$

Aquí β substituye a $\frac{V}{c}$, y, por tanto, representa la velocidad medida con la nueva unidad de tiempo.

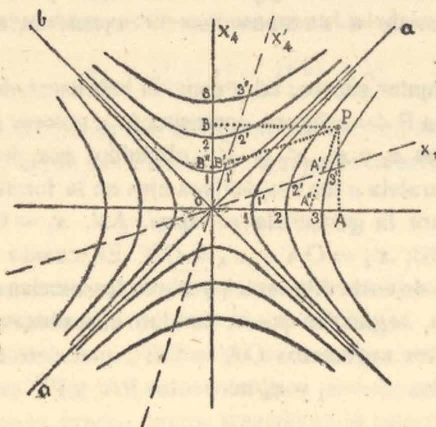


Fig. 16

Las hipérbolas (29, 2) se convierten en el grupo de las equiláteras (fig. 16)

$$x_1^2 - x_4^2 = x_1'^2 - x_4'^2 = \pm\,\lambda^2. \qquad (29,5)$$

En cuanto a los ejes del sistema de O', serán

$$\left.\begin{array}{ll}(X'_4) & x_1 - \beta x_4 = 0 \\ (X'_1) & x_4 - \beta x_1 = 0\end{array}\right\}, \qquad (29, 6)$$

de modo que forman ángulos iguales con sus respectivos homólogos antiguos.

Es evidente que la primera de estas ecuaciones, que define el eje X'_4 en el Universo, tal como O le conoce, traduce la ley del movimiento de O' relativa a O. En cuanto a la segunda, es el lugar que para O corresponde a *sucesos* que O' considera simultáneos.

Cualquier suceso, tal y como el representado por el punto P de la figura, corresponde a valores de las variables x_1 y x_4, x'_1 y x'_4, obtenidos por proyección paralela a los respectivos ejes en la forma clásica para la geometría analítica. Así, $x_1 = OA$ y $x_4 = OB$; $x'_1 = OA'$ y $x'_4 = OB'$. En cuanto a los valores de estas últimas x'_1 y x'_4 en las escalas de O, esto es, según las puede percibir este observador, serían los segmentos OA'' y OB'', que determinan sobre los ejes x_1 y x_4 las rectas PA' y PB' prolongadas.

30. Recordaré aún que el diagrama plano, que contiene todos los elementos indispensables para deducir el aspecto que la Naturaleza ofrece a O' del conocimiento que O posee, se ha construído previa



la elección de un sistema de ejes conveniente. Prescindir de esta condición, equivale a volver a un sistema de ejes cualquiera, operación que, según es sabido, se realizará mediante una rotación en el espacio; esto es, un giro alrededor del eje X_4 normal al mismo. Mediante este giro, las hipérbolas de la figura 16 engendrarán hiperboloides de revolución: los unos, de dos hojas, cuyas generatrices son las hipérbolas definidas por $-\lambda^2$; y las otras, de una, correspondientes a la hipérbolas $+\lambda^2$. Dicho se está que tales hiperboloides son variedades de tres dimensiones, cuyas ecuaciones en el Universo serán

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = \pm \lambda^2, \qquad (30,1)$$

y las secciones que el espacio produce en los de una hoja, serán las esferas de garganta representadas por

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = + \lambda^2.$$

Naturalmente, las asíntotas generan el cono asintótico obtenido haciendo $\lambda = 0$ en (30,1).

En el caso particular de un mundo plano, los hiperboloides y el cono asintótico son superficies de segundo grado, que he trazado en la figura 17 para ayudar la formación de imágenes que aclaren los anteriores conceptos. A las esferas de garganta corresponderán aquí circunferencias.

Estos círculos y esferas indican que, cuando se



cambia de ejes en el Universo, manteniendo invariable el X_4, las escalas se transportan sin alteración en su longitud; esto es, mediante rotaciones euclidianas. Físicamente, ello quiere decir que una figura geométrica cualquiera puede cambiar de posición sin que se altere ninguna de sus dimensiones, a la manera que un sistema rígido.

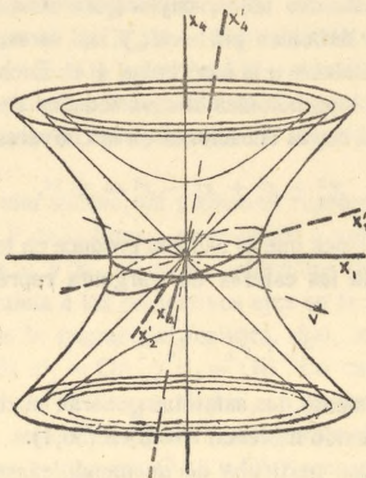


Fig. 17

Pero si pasamos de O a O′, el eje X_4 ha de reemplazarse por X'_4, y el espacio de los X'_1, X'_2, X'_3 no cortará ya al hiperboloide de una hoja según una esfera, sino según un elipsoide, o según una elipse, caso de concretarnos al mundo plano de la figura 17;



de modo que los cambios de posición de las figuras geométricas no tendrán lugar en el espacio de O' como sistemas rígidos.

Sin duda, esta falta de rigidez sólo la aprecia O, pues el diagrama que O' mismo trazaría como expresión de sus conocimientos, se deduce de los anteriores mediante una deformación que lleve los ejes X'_4 y X'_1, X'_2, X'_3 a las posiciones que ocupan ahora los X_4 y X_1, X_2, X_3; deformación que transforma nuevamente el elipsoide en esfera, y, en cambio, convierte en elipsoide la esfera de antes.

Lo que precede muestra claramente que las cuatro dimensiones del Universo no son homogéneas: cuando, en vez de efectuar un cambio de ejes con X_4 fijo, se quiere que X_4 intervenga, las transformaciones de las figuras no se efectúan según las prescripciones de la Geometría euclidiana. Así, en el caso de que X_2 y X_3 permanezcan fijos, y por ende se trate de variar los ejes X_1 y X_4, esto se ha de hacer mediante una especie de rotación, en que las hipérbolas equiláteras desempeñan la función que en aquella Geometría llenan las circunferencias.

31. Más evidente es la heterogeneidad de los ejes cuando se tiene en cuenta que el cono asintótico divide a todos los elementos geométricos del Universo en dos categorías inconfundibles.

a) En primer término, las rectas cuyas paralelas por el origen son interiores al cono, poseen un ca-



rácter absolutamente heterogéneo con las restantes. En efecto: las primeras son las únicas que pueden representar la ley de movimiento de un punto que se traslada uniformemente, puesto que su velocidad β tiene por límite la unidad, de donde la recta que traduce aquella ley ha de formar con X_4 un ángulo inferior a 45°. Por eso se las puede llamar *hodócronas rectilíneas*. Por el contrario, toda recta que forme con X_4 un ángulo mayor de 45°, representa el lugar geométrico de sucesos que son simultáneos para un cierto observador, dotado de una velocidad conveniente respecto de O.

Dije, en efecto (§ 19), que la condición indispensable para que un observador O′ perciba simultáneamente dos sucesos, que para O se producen en puntos a distancia δx_1 y con un intervalo δt, es que la velocidad relativa de O′ satisfaga la ecuación,

$$\delta t - \frac{V}{c^2}\,\delta x_1 = 0$$

o reemplazando δt por $\dfrac{\delta x_4}{c}$

$$\delta x_4 = \beta \delta x_1;$$

de modo que el ángulo entre la recta que liga los dos sucesos y el eje X_4 ha de ser mayor de 45°. Según lo que acabamos de decir, las rectas que cumplen con esta condición pueden representar para un



observador adecuado una varilla material, y de aquí que convenga llamarlas *reglas rectilíneas*.

Ahora, sin más explicación, se comprende que de las cuatro rectas que pueden ser ejes de referencia para el diagrama que traduce el conocimiento de un observador cualquiera, tres han de ser de la clase de reglas, que formarán los ejes espaciales, y la cuarta de la clase de hodócronas, que constituirá el eje de los tiempos.

De un modo general todas las curvas que podemos imaginar en el Universo se clasifican en dos grupos: o son tales que sus tangentes pertenecen todas ellas a la clase de hodócronas, o no cumplen dicha condición. En el primer caso las llamaremos *hodócronas curvilíneas*, pues podrán traducir la ley del movimiento de un punto.

Fuera de los dos grupos de hodócronas y reglas, están las rectas paralelas a las generatrices del cono asintótico, límite común de unas y otras. Representan la hodócrona de una onda luminosa, y el carácter de regla que también poseen, indica que sus diferentes puntos son simultáneos para quien se transporte con la velocidad *c*, perdiéndose de este modo para él toda noción de tiempo.

b) Los planos, así como las variedades de tres dimensiones contenidas en el Universo, o cortan al cono asintótico, o son exteriores a él. En el primer caso, si son planos, aquel cono le interceptará según



dos rectas que separan las hodócronas de las reglas, de modo que viene a constituir el Universo correspondiente al mundo lineal identificable con cualquiera de estas reglas. Si es una variedad de tres dimensiones, la intersección con el cono será la superficie cónica de segundo grado que separe en ella las hodócronas de las reglas. De modo que también en este caso se trata de un Universo que corresponderá a un mundo bidimensional, cual el de la figura 17; y así pueden llamarse estos elementos geométricos que cortan al cono, *Universos de dos* o *tres dimensiones*.

Cuando no existe intersección, tanto los planos como las variedades de tres dimensiones son lugares geométricos de sucesos que *pueden ser* simultáneos para un observador conveniente, y entonces se identificarán con el espacio físico o con un plano en él contenido, siempre desde el punto de vista del observador en cuestión. Por ello conviene reservar los términos *plano* y *espacio* para este caso exclusivamente. Agregaré que las curvas íntegramente contenidas en un espacio pueden y deben recibir el nombre general de *reglas curvilíneas*, puesto que pueden ser las posiciones de uno de los instrumentos de dibujo que llevan este nombre.

32. Adviértese por lo que precede, cuán otra cosa que el simple espacio físico es la variedad constituída cuando se le agrega la variable tiempo. No



se trata de la mera agregación de una dimensión más: el Universo tiene el mismo carácter si posee dos o tres dimensiones, que en el caso de elevarse su número a cuatro. La esencia de su heterogeneidad con el espacio físico, que es uno de sus elementos, está reflejada en la imposibilidad de sostener los métodos que derivan de la Geometría de Euclides para cambiar de sistema de referencia, y así averiguar los aspectos que ofrece la Naturaleza a los diferentes observadores cuando este cambio afecta a la variable tiempo. Para encontrar las nuevas leyes de la transformación, es necesario modificar los postulados de aquella Geometría en forma tal, que el papel que desempeñaba la circunferencia venga a ser ocupado por la hipérbola equilátera. Pero vuelvo a repetirlo, porque es de interés capital para lo futuro: nada se modifica cuando el cambio de sistema no afecta al eje de los tiempos. Entonces la Geometría de Euclides conserva sus prerrogativas.

Este método, que consiste en alterar los postulados geométricos, no es el único posible para salvaguardar la heterogeneidad del espacio y el tiempo. El propio Minkowski señaló y desarrolló de un modo más completo otro que tiene la ventaja de conservar la Geometría de Euclides para el Universo, ventaja no despreciable en atención a nuestros hábitos mentales. Consiste en afectar del símbolo de imaginaris-



mo a la dimensión *tiempo;* esto es, efectuar el cambio de variables siguiente:

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2, \quad x_3 = \xi_3, \quad ix_4 = \xi_4.$$

Las superficies invariantes que sirven para el transporte de las escalas serán

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = \lambda^2,$$

que representan hiperesferas. Así, los cambios de ejes serán rotaciones como en el espacio euclidiano, siquiera algunos de los cosenos directores de los nuevos ejes respecto de los antiguos (todos aquellos relativos a ángulos formados por uno de los ξ_4 o ξ'_4 con cualquiera de los restantes) hayan de ser imaginarios.

Dicho se está que aquel «conservar la Geometría de Euclides» que señalaba como ventaja de este modo de distinguir el espacio y el tiempo, ha de entenderse sólo para el lenguaje con que se enuncian las proposiciones relativas al Universo. Pero en cambio se pierde toda posibilidad de representación gráfica, puesto que la dimensión imaginaria no cabe en el dibujo. Por ello es el método de Minkowski preferible para el desarrollo profundo de la teoría de la relatividad; pero menos adecuado para la discusión de los fundamentos físicos y filosóficos a que este libro va dedicado.

33. No son necesarios grandes cálculos para



comprobar que la aplicación del grupo de Lorentz, no sólo deja invariantes los hiperboloides (30, 1), sino las expresiones de la forma

$$\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 - \delta x_4^2 = \pm \delta s^2,$$

donde δ puede representar incrementos finitos o infinitamente pequeños. En este último caso, que es el más interesante para lo futuro, se deberá reemplazar δ por el símbolo de las diferenciales d. El doble índice que afecta a δs^2 corresponde a la doble naturaleza del segmento rectilíneo, cuyas proyecciones sobre los ejes del Universo son δx_1, δx_2, δx_3 y δx_4; si se trata de una regla, el primer miembro es positivo, y por conveniencias posteriores reemplazaremos δs^2 por $\delta\lambda^2$; en cambio, cuando es una hodócrona, el primer miembro es negativo y cambiaremos δs^2 por $\delta\tau^2$. Cuando sea paralelo a las generatrices del cono $ds^2 = 0$.

La invariancia de δs^2 contrasta con la indeterminación que poseen en el Universo las nociones: intervalo de tiempo y distancia entre dos sucesos; indeterminación, por otra parte perfectamente lógica, en atención a que carece de sentido hablar de distancia entre dos puntos que no existen a la vez (en el mismo instante), y también es notorio que los conceptos de simultaneidad y sucesión en el tiempo no lo tienen claro y determinado sino cuando se refieren a la conciencia de un mismo observador.



Por esto parece lógico devolver una significación concreta a las nociones aludidas refiriéndolas a estos casos en que poseen un sentido preciso. Bastaría para ello llamar *longitud elemental* a la expresión

$$(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2)^{\frac{1}{2}} = d\lambda,$$

relativa a una regla, y que por ello se confunde con el elemento

$$(dx'^2_1 + dx'^2_2 + dx'^2_3)^{\frac{1}{2}}$$

cuando se elige el sistema de referencia de modo que $d\lambda$ esté contenido en el espacio de los ejes X'_1, X'_2, X'_3. Análogamente, *intervalo elemental de tiempo* habría de ser el nombre dado a

$$(-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2)^{\frac{1}{2}} = d\tau,$$

que es parte de una hodócrona, de modo que en el sistema para el cual la tangente al elemento de curva en cuestión es paralelo al eje de los tiempos, se reduce a

$$dx'_4 = d\tau.$$

Aquí está la razón de haber cambiado la letra *s* por λ y τ para los dos casos particulares ahora más detallados.

Sin embargo, no es conveniente concretar de este modo los nombres de longitud y tiempo, porque ello



exigiría buscar otros para las variables fundamentales, poniéndonos en manifiesta contradicción con el lenguaje de la ciencia clásica, perfectamente lógico como una primera aproximación. Así, es preferible aceptar el adjetivo *propio*, que ya Minkowski agregó al elemento de tiempo entendido en la forma que he explicado. Con tal nomenclatura $d\lambda$ y $d\tau$ serán intervalos elementales de *longitud* y *tiempo propios*; a ds le llamaré simplemente *intervalo elemental*.

Físicamente, la invariancia de ds representa la posibilidad de realizar medidas de espacio y tiempo en lugares diferentes del Universo, eligiendo la representación material de la unidad con plena independencia de su localización e historia. Esta posibilidad en la ciencia clásica era evidente en atención al valor absoluto de las duraciones y distancias; pero con el principio restringido de relatividad pierden este carácter y pasan a ser aspectos distintos o, mejor, constituyentes heterogéneos de una realidad única: el intervalo ds. La distancia que separa los dos puntos en que se producen los sucesos que limitan este intervalo, así como la diferencia de los tiempos en que ocurren, dependen del observador que los percibe, de su posición y velocidad relativa a ellos.

Naturalmente, ds no depende del conjunto de valores de las x_i, a partir de los cuales se toman los



incrementos dx_i; o con un lenguaje más intuitivo, *ds* es rígidamente transportable por todo el Universo, tanto cuando se trata de simples cambios de orientación, en los cuales varían los incrementos dx_i, pero no las x_i, como si se alteran estas coordenadas. Un caso interesante es aquel en que el transporte se hace paralelamente; esto es, llevando *ds* a la coincidencia con segmentos de rectas de un haz de paralelas. Entonces son también invariantes todos los incrementos dx_i, lo cual equivale a decir, empleando un lenguaje más físico, que las reglas graduadas que se utilizan para comparar aquellos segmentos son rígidas, en el sentido clásico. Esto autoriza a elegir la unidad material *(metro)* que haya de emplearse para medir las coordenadas (distancias o duraciones) en sistemas que permanecen en reposo relativo.

Las cosas varían cuando existe cambio de orientación en el Universo o, dicho de otro modo, cuando haya de pasarse de un sistema a otro que se mueve uniformemente respecto a él, pues entonces las reglas que materializan a la unidad no se conservarán idénticas a sí mismas. Sin embargo, la invariancia de *ds* da también en este caso valor universal a la unidad elegida para un sistema, pues gracias a ella disponemos de relaciones que permiten la comparación de las reglas en sistemas diferentes.



34. Dicho se está que la invariancia de ds acarrea la de

$$\int_{A}^{B} ds, \tag{34, 1}$$

extendida a una curva determinada, puesto que se trata de una suma de magnitudes que gozan de aquella condición. En los dos casos particulares en que la curva es regla u hodócrona convendrá reemplazar ds por $d\lambda$ y $d\tau$, de modo que la integral anterior se convertirá en

$$\int_{A_1}^{B_1} d\lambda \quad \text{e} \quad \int_{A_2}^{B_2} d\tau, \tag{34,2}$$

respectivamente, señalándose los límites de distinto modo en atención a que los puntos A y B, entre los cuales se traza la línea de integración, han de pertenecer ambos a la región exterior del cono asintótico en el primer caso, y a la interior en el segundo. Aquélla expresa la longitud propia de la curva dibujada entre A_1 y B_1, y ésta el intervalo de tiempo propio cuando el móvil sigue en su movimiento la ley que define la línea de integración.

Los dos casos aludidos son los únicos en que (34, 1) tiene un sentido físico definido, y muestran en una forma algo diversa que el grupo de Lorentz, como los conceptos de tiempo y espacio no tienen el valor absoluto que les atribuía la ciencia clásica. En el



grupo mencionado, un intervalo de tiempo $\left(\int dx_4\right)$ y la longitud de una línea $\left(\int\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}\right)$ tienen sentidos definidos para todo el Universo mientras se les considera referidos a un sistema de coordenadas: vistos por un observador particular, O. Pasando de él al O′ en movimiento uniforme, aquellas magnitudes cambian, conservándose idénticos los sucesos extremos.

Al contrario, los valores propios se conservan invariantes para cualquiera de estos cambios; pero no tienen sentido fuera de la cadena de sucesos a que se refieren, los cuales forman una serie evolutiva que pudiéramos llamar monogenética, por ser estados sucesivos de un solo objeto, en el caso del tiempo propio, mientras para la longitud propia son simple yuxtaposición sin relación causal mutua, puesto que han de ser simultáneos para algún observador.

La Geometría propia del Universo tiene de común con la euclidiana el que la extensión de la recta que une dos puntos (o sucesos) es la línea más corta que entre ellos se puede trazar, de suerte que cabe definirla analíticamente por la condición

$$\delta\int_A^B ds = 0. \qquad (34, 3)$$

Si es de la clase de reglas, ello viene a expresar la



más corta distancia, o mínimo de longitud propia entre dos puntos, según era lógico, puesto que todas las reglas están en el espacio del Universo, cuya Geometría continúa siendo euclidiana. Si se trata de una hodócrona rectilínea, la condición

$$\delta \int_{A_2}^{B_2} d\tau = 0 \qquad (34, 4)$$

corresponde también a un postulado de la ciencia clásica que a primera vista nadie habría puesto en relación con aquel otro de la Geometría de Euclides: me refiero al principio de inercia. En efecto: (34, 4) es la ecuación de la hodócrona rectilínea que va de A_2 a B_2, y, como ésta, traduce el movimiento uniforme de un punto; afirmar que tal movimiento corresponde al caso en que no existen fuerzas aplicadas, equivale a decir que se ha de satisfacer dicha ecuación (34, 4), o expresado en lenguaje vulgar: que el tiempo propio transcurrido cuando se pasa de A_2 a B_2 será máximo. Máximo en atención a que $d\tau^2$ corresponde al caso en que ds^2 es negativo.

Y, naturalmente, también es recta la proyección de la hodócrona en cualquiera de los espacios posibles, que es la trayectoria del punto en el mismo.



CAPÍTULO V

La gravitación en la ciencia clásica.—Postulado de igualdad de las masas inerte y gravitatoria

35. Ley de Newton y movimientos de Kepler.—36. Perturbaciones de los planetas.—37. Intentos de interpretación de las perturbaciones residuales mediante nuevas masas atrayentes.—38. Alteraciones empíricas de la ley de Newton.—39. Acciones a distancia y por contigüedad.—40. Bosquejo histórico de las interpretaciones de la gravitación.—41. Influencia del medio y de la naturaleza de los cuerpos sobre la atracción universal.—42. Velocidad de la gravitación. 43. Proporcionalidad del peso a la masa.—44. Peso de la energía: desviación del rayo luminoso.

35. Aun a trueque de abrir un paréntesis en la exposición que vengo haciendo de la teoría fundada en el principio de relatividad, he de detenerme a presentar el cuadro que ofrecían los fenómenos gravitatorios antes de que Einstein formulase su teoría, porque así conviene a la clara visión de su importancia.

Había conseguido Kepler establecer un poco de



orden en las ideas referentes al movimiento de los planetas, demostrando que describen órbitas elípticas, uno de cuyos focos ocupa el Sol; que el radio vector de cada una barre en el espacio áreas iguales en tiempos iguales, y que los cubos de sus semiejes mayores son proporcionales a los cuadrados de los tiempos invertidos en sus respectivas revoluciones. Pero se trataba de afirmaciones puramente empíricas, deducidas discutiendo las observaciones de su maestro Tycho-Brahe.

Newton, utilizando la Dinámica construída sobre los postulados de que me ocupé en el capítulo primero de este libro, y aceptando la existencia de una fuerza atractiva entre cada dos cuerpos, que se define por la ley fundamental que lleva su nombre,

$$f = \frac{k'}{4\pi} \frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (35, 1)$$

creó la Mecánica celeste, coordinando en apretado haz el conjunto de los hechos dispersos que la observación había denunciado. Así, es perfectamente justo decir que Newton dió una *explicación* de los fenómenos gravitatorios, aunque no se trate de haber inventado un mecanismo de funcionamiento evidente capaz de reproducir los fenómenos naturales. Agregaré que tampoco se trata de una explicación que deje nuestro espíritu plenamente satisfecho, según luego haré resaltar.



En esta ley elemental (35, 1), que es el broche mágico que da perfecta unidad a la vida del Cosmos, r representa la distancia que separa los dos cuerpos considerados; m_1 y m_2, coeficientes característicos de cada uno de ellos, que pueden llamarse sus *masas gravitatorias*, y $\frac{k'}{4\pi}$, una constante dependiente por lo menos del sistema de unidades utilizado para expresar las diferentes magnitudes que intervienen en (35, 1). Cuando se adopta el consagrado en las ciencias físicas (cm. gr. sec.), la discusión de todas las mediciones experimentales de $\frac{k'}{4\pi}$ lleva a adoptar como valor más probable

$$\frac{k'}{4\pi} = 6{,}658 \times 10^{-8} \text{ cm.}^3 \text{ sec.}^{-2} \text{ gr.}^{-1}$$

Si se sustituye el segundo de tiempo por la unidad $\frac{1}{c}$, según aconseja la teoría de la relatividad,

$$\frac{k}{4\pi} = \frac{6.658 \times 10^{-8}}{c^2} = 7.398 \times 10^{-29}.$$

Si nos limitamos al caso de un solo planeta en presencia del Sol, es notorio que, sea cual fuere la magnitud y dirección de la velocidad inicial $\vec{v}_0$ que se suponga impresa al primero, continuará moviéndose en el plano definido por ella y el astro cen-



tral. Así, pues, la órbita que describe será plana, y conviene emplear como coordenadas un sistema polar cuyo polo está ocupado por el Sol, y el eje es una recta cualquiera del plano de la órbita.

Llamando r el radio vector y θ el ángulo que forma con el eje, las ecuaciones del movimiento son

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{k'}{4\pi}\frac{m_1m_2}{r^2},$$

$$m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0.$$

La primera corresponde a la componente radial del movimiento, según la cual actúa la atracción entre ambos astros, y la segunda se refiere a la componente normal al radio. De esta última se deduce

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h',$$

cuya traducción es que el área barrida por el radio vector en cada unidad de tiempo es constante, de modo que puede calcularse para un momento arbitrario. Designando los valores correspondientes del radio vector y la velocidad lineal con el subíndice cero,

$$h' = r_0v_0 \text{ sen } (v_0r_0).$$

Si ahora se admite que las masas de inercia, m, y gravitatoria, m_2, de un mismo cuerpo, son idénticas, y además se elimina el tiempo, se obtiene la ecuación diferencial de la trayectoria del planeta, que



posee la forma

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dt^2} + \frac{1}{r} = \frac{k'}{4\pi} \frac{m_1}{h'^2}, \qquad (35, 2)$$

que, integrada por los métodos clásicos, da para la ecuación finita de la órbita

$$\frac{1}{r} = \frac{k' m_1}{4\pi\, h'^2} [1 + e \cos(\theta - \omega)]. \qquad (35, 3)$$

La forma de esta ecuación corresponde a una sección cónica, cuya excentricidad es e, y ω el ángulo que forma con el eje polar el radio vector del punto más próximo al centro de atracción, o perihelio de la curva. Geométricamente la curva es elipse, parábola o hipérbola, según que e sea menor, igual o mayor que la unidad, y esta circunstancia se traduce físicamente por el cumplimiento de las condiciones

$$v_0^2 < \frac{k' m_1}{2\pi\, r_0} \quad \text{(elipse)}$$

$$v_0^2 = \frac{k' m_1}{2\pi\, r_0} \quad \text{(parábola)}$$

$$v_0^2 > \frac{k' m_1}{2\pi\, r_0} \quad \text{(hipérbola),}$$

donde v_0 es la velocidad y r_0 el radio vector que corresponden al planeta en un determinado instante. El



primer caso es el que se ofrece en todos los planetas. En cambio, para los cometas es posible que se produzca frecuentemente una de las otras dos condiciones, y si así es, sólo transitoriamente pertenecen a nuestro sistema; luego, se pierden para no volver.

Circunscribiéndome al caso de los planetas, las órbitas no sólo son elípticas, sino además de excentricidad muy pequeña, pues las dos mayores son 0,2056 y 0,0933, correspondientes a Mercurio y Marte. Si se designan por a y b los semiejes, de modo que $b = a\,(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$, la constante de las áreas será

$$h' = \frac{2\pi a^2 \left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{T}},$$

si T es la duración de una revolución en segundos de tiempo, o expresándola en $\frac{1}{c}$

$$h = \frac{2\pi a^2 \left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{X}_4} = \left(\frac{h'}{c}\right).$$

Además, en el caso de la elipse, la comparación de (35, 3) con la ecuación, en la forma que se escribe ordinariamente en la teoría de estas curvas, da

$$\frac{4\pi h^2}{km_1} = a\,(1 - e^2);$$

de donde

$$\frac{km_1}{4\pi} = \frac{h^2}{a\,(1 - e^2)} = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathrm{X}^2_4},$$



fórmula importante que traduce la tercera ley de Kepler y que he de utilizar más adelante.

Antes de abandonar este bosquejo de la teoría clásica del movimiento de un planeta alrededor del Sol, es interesante notar que el exponente 2 con que figura r en (35,1) es esencial para que la órbita sea elíptica con el Sol en un foco. Si se adopta para él cualquier otro número, n, la trayectoria no será cerrada, alejándose tanto más de la forma elíptica cuanto mayor la diferencia $(n-2)$. Si es pequeña, cabe interpretar la órbita como una elipse que gira en su propio plano: en el mismo sentido que el movimiento del planeta (fig. 18) cuando $n-2>0$, y en sentido opuesto si $n-2<0$.



Fig. 18

36. Pero el caso que acabamos de considerar, en el cual se supone un solo planeta sometido a la atracción solar, no responde a la realidad. Existen los demás planetas que actúan también sobre el primero, y aunque estas acciones son, ciertamente, muy pequeñas, distan mucho de ser despreciables. La ventaja de su escasa magnitud consiste en la posibilidad de interpretar la verdadera trayectoria del planeta como una elipse cuya forma y posición en el espacio, en vez de permanecer invariables, se alteran, bien

en un sentido constante, bien con una cierta periodicidad. Estos cambios son siempre pequeños o muy lentos, por lo cual se les ha considerado como *perturbaciones* del movimiento que responde a las leyes de Kepler, denominándose *acciones perturbatrices* a las procedentes de los planetas aludidos, las cuales se agregan como fuerzas adicionales a las ecuaciones del movimiento para el caso sencillo ya considerado.

Imaginemos que la elipse APΠ (fig. 19) es la órbita del planeta en el espacio cuando no existen

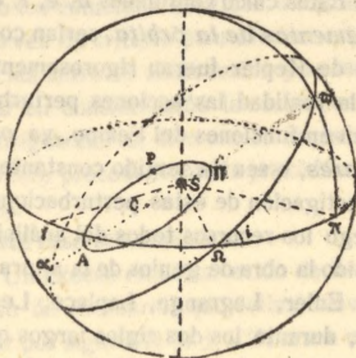


Fig. 19

acciones perturbatrices, la cual se proyecta sobre la bóveda celeste, según el círculo $\varpi\Omega\alpha$. Su forma está completamente determinada si se conoce el semieje

mayor, $a = C\Pi$, y la excentricidad, $e = \frac{CS}{C\Pi}$ (C representa el centro de la elipse). Su posición en el espacio queda definida cuando se conoce la inclinación *i* de su plano S,ϖΩα respecto del de la órbita terrestre (*eclíptica*) S,γΩΠ; la longitud del nodo ascendente Ω del planeta, medida por el ángulo que forma el radio vector, Sγ, de la Tierra en el momento del equinoccio de primavera con el correspondiente al planeta, SΩ, en el instante en que corta a la eclíptica, y la orientación de la elipse en su propio plano, que se fija mediante la longitud (ángulo γSΠ) del perihelio. Estas cinco cantidades *a*, *e*, *i*, Ω y Π, llamadas *elementos de la órbita*, serían constantes si las leyes de Kepler fueran rigorosamente exactas; pero en la realidad las acciones perturbadoras las convierten en funciones del tiempo, ya *periódicas*, ya *seculares*, o sea de sentido constante.

La investigación de estas perturbaciones, poniendo en juego los recursos todos del análisis matemático, ha sido la obra de genios de la altura del propio Newton, Euler, Lagrange, Laplace, Le Verrier y Poincaré, durante los dos siglos largos que han seguido a la publicación de la *Philosophiæ naturalis principia matematica*. Sin más hipótesis física que la ley (35,1), la Mecánica celeste clásica ha ido resolviendo la inmensa mayoría de los problemas planteados por la observación; algunos de complejidad



tan grande, como cuantos se refieren a la teoría de la Luna; los otros de tan brillante éxito, como el descubrimiento de Neptuno, cuya existencia y principales características dinámicas previó Le Verrier para interpretar las perturbaciones inexplicadas del movimiento de Urano, último planeta en su tiempo conocido.

Del alto valor que ha de atribuirse a la teoría de Newton, considerada como una primera aproximación, se puede juzgar fijando la atención en el hecho bien elocuente de que entre todas las perturbaciones denunciadas por la observación, sólo algunas han resistido los esfuerzos dirigidos a lograr su explicación. Sirven de criterio para afirmar este fracaso las diferencias entre la observación y la teoría después de tomar en consideración las acciones perturbatrices de origen cierto, diferencias superiores a la incertidumbre procedente de la precisión de las observaciones.

En este caso se encuentran:

1.° Un exceso en la variación de la longitud del perihelio de Mercurio, que estimó Newcomb puede alcanzar por siglo a $41''2 \pm 2''1$, o sea más de veinte veces el error probable. Recientemente Grossmann ha sometido los cálculos de Newcomb a una crítica cuidadosa, y haciendo una más exacta valoración de todas las observaciones, así como la corrección de un error material que se deslizó en los cálculos del



astrónomo americano, obtiene como valor más probable para el referido corrimiento 38″.

2.° En el movimiento de los nodos de Venus existe, entre la observación y el cálculo, una diferencia de 10″1 ± 2″9, también por siglo.

3.° Un cambio en la longitud del perihelio de Marte que excede del valor teórico en 8″0 ± 3″7, para la misma unidad de tiempo.

4.° Y la variación secular de la excentricidad de la órbita de Mercurio, que presenta un defecto de $(4{,}26 \pm 2{,}22)\ 10^{-6}$.

Aun pueden agregarse ciertas irregularidades del cometa Encke y de la Luna, que ofrecen dificultad mayor para un cálculo seguro en atención a la complejidad de la teoría de su movimiento.

Pero aun en los casos citados conviene, para una clara visión de lo que significan estas perturbaciones residuales, compararlas con el conjunto de las explicadas por la teoría de Newton. Así, en el caso de la rotación de las órbitas de Mercurio y Marte, cuando se compara el movimiento de estos planetas con las elipses invariables que predice la ley (35, 1), supuesto el sistema Sol-planeta alejado de todo otro cuerpo celeste, la longitud del perihelio cambia en 574″ por centuria para el primero, y 1600″ para el segundo, de cuyos cambios la presencia de los planetas próximos a cada uno de ellos permite interpretar 533″ y 1592″; de suerte que los respectivos ex-



cesos arriba señalados apenas son 0,075 y 0,005. El movimiento de los nodos de Venus es en totalidad 1779" en el siglo; de suerte que la parte inexplicada no llega a las 0,006.

37. Ciertamente no se resignaron los astrónomos a ignorar el origen de las anomalías recordadas, y muy especialmente la variación de longitud del perihelio de Mercurio. Ya Le Verrier, sugestionado por el éxito resonante del descubrimiento de Neptuno, sugirió la posible existencia de un planeta intramercurial que llegó a bautizar con el nombre de Vulcano; pero cuantos esfuerzos se hicieron en su persecución fueron baldíos, y ello llevó a pensar en una masa que ocupase mayor volumen con densidad pequeña, para cuya hipótesis ofrecían cierta base los conocidos fenómenos de la luz zodiacal y la corona solar. La primera es una ancha banda luminosa que rodea al Sol en las proximidades del plano de la eclíptica, y se extiende a una distancia mayor de 90° de aquel astro. La segunda, bien conocida por cuantos han contemplado un eclipse total, se presenta en forma de bandas luminosas irregulares y variables, cuya mayor extensión se produce en el ecuador del astro central, pasan por un mínimo acentuado en las latitudes medias para extenderse nuevamente en las regiones polares. Uno y otro efectos denuncian la presencia de materia gasiforme o meteórica que difunde por difracción o reflección irregular la luz solar.



Se debe a Seeliger el más serio intento realizado para buscar la interpretación de los efectos residuales en la materia que provoca la luz zodiacal. La hipótesis con que ciertamente consigue la finalidad perseguida es compleja: la materia cósmica que rodea al Sol integra dos elipsoides de dimensiones muy diferentes, pues el uno está totalmente contenido en la órbita de Mercurio, y el otro se extiende más allá de nuestro planeta. Existe una cierta vaguedad para elegir los valores de las excentricidades de estos elipsoides y la posición del segundo, mientras las densidades de ambos ($\rho_1 = 2{,}18 \times 10^{-11}$, $\rho_2 = 3{,}1 \times 10^{-15}$, siendo 1 la densidad del Sol), y la longitud del nodo del primero se determinan con vistas a la resolución del problema planteado.

Aún agrega Seeliger una supuesta rotación de los ejes de referencia empleados en Astronomía (Sol-plano de la eclíptica-radio vector del equinoccio de primavera del año 1850) respecto del sistema de inercia, para el cual se satisfacen los postulados de Newton sin la intervención de fuerzas centrífugas, rotación que alcanza a 5″85 ± 1″22 por siglo, y que ya Auding había supuesto.

Sitter ha discutido la teoría de Seeliger tratando de deslindar el papel que desempeña cada una de las hipótesis enunciadas arriba, llegando a la conclusión de que el elipsoide pequeño interviene sólo para explicar la anomalía del perihelio; el mayor afecta casi



exclusivamente al movimiento de los nodos de Venus, mientras la rotación de los ejes parece esencial para la eficacia de la teoría. Jeffreys, por otra parte, ha demostrado que el brillo de la luz zodiacal es incompatible con la densidad supuesta por Seeliger, tanto si se admite que la materia difundente se halla integrada por un conjunto de partículas sólidas como si se trata de una masa gaseosa. Si se realiza el cálculo partiendo del referido brillo de la luz zodiacal, el efecto producido por partículas aun de 10 km., límite rebasado el cual serían ya visibles como pequeños planetas independientes, no excedería del orden de los errores cometidos en la fijación del corrimiento del perihelio de Mercurio; si se supone la masa gaseosa con la densidad que del brillo se deduce, apenas se obtendría un efecto 3.000 veces inferior al observado. Jeffreys hace también el cálculo para el efecto que puede producir la materia coronaria, llegando a números aún inferiores.

Así, descartada la posibilidad de recurrir a la luz zodiacal y la corona para explicar por sus efectos gravitatorios las perturbaciones que restan después de tomar en consideración las influencias mutuas de los planetas, las hipótesis del tipo de la de Seeliger pierden todo su valor en atención a que, si bien es innegable la posibilidad de acudir a masas ocultas, de cuyas características podemos disponer libremente para explicar cualquier efecto mecánico, ello pue-



de hacerse de innumerables maneras, circunstancia que justifica la falta de crédito que les atribuía.

38. No merecen mayor atención los intentos realizados para modificar la ley de Newton, bien exclusivamente con el fin de eliminar la anomalía de Mercurio alterando el exponente 2 en la cantidad conveniente, que Hall ha calculado ser $+ 16 \times 10^{-8}$, bien guiados por las fórmulas de la Electrodinámica, en cuyo caso los residuos que venimos discutiendo se han utilizado como criterio para la selección entre los diferentes tipos de ley que aparecen posibles. Baste decir que en ambos casos se puede lograr la desaparición de algunos de estos residuos, pero no sin introducir complicaciones que compensan aquella ventaja; así, la hipótesis de Hall hace prever un cambio de longitud de 142″ por centuria en el perigeo de la Luna, que es incompatible con la observación.

39. No es extraño que los resonantes éxitos logrados por la teoría de Newton en la coordinación de los movimientos de nuestro sistema planetario, de la cual he dado más arriba medida exacta, acallasen frecuentemente la resistencia que el espíritu ofrece a la hipótesis de una acción a distancia, implícitamente contenida en la ley (35, 1). Trátase, en efecto, de una ley estática, en la cual no interviene directa ni indirectamente el tiempo, de modo que las fuerzas, cuya medida da, se manifiestan en todos



los puntos del espacio, por alejados que se hallen, según corresponde a la distribución actual de la materia.

La resistencia a que aludía surgió ya en el propio Newton, y ha renacido en el espíritu de muchos físicos, circunstancia que demuestra no es un prejuicio de educación esta incapacidad para concebir las acciones a distancia, y, por ende, a mi entender, al menos, una prueba de la irrealidad de aquellas acciones, que hemos de esforzarnos en reemplazar por otras que obren por contacto o contigüedad.

Naturalmente, estas últimas deben expresarse por una ecuación diferencial, pues el fenómeno que ocurre en un lugar determinado del espacio, en un tiempo también definido, ha de ser consecuencia del estado físico de la región que inmediamente le envuelve en el instante anterior, y sólo de él puede depender directamente. Mas nada impide, *a priori*, que las referidas ecuaciones sean integrables; esto es, que se pueda englobar el proceso físico completo, que se desenvuelve en un dominio espacial y temporal finitos, en una expresión analítica del mismo carácter, la cual no ha de entenderse como traducción directa de la realidad, sino como una fórmula que sintetiza un largo razonamiento. Exactamente lo inverso se da cuando en la teoría de las acciones a distancia se utilizan expresiones diferenciales derivadas de sus leyes finitas como auxiliares en el razonamiento.



Así, la diferencia entre los dos tipos de teorías que estoy contraponiendo se manifiesta, no porque en ellas figuren ecuaciones finitas o diferenciales de un modo exclusivo, sino porque se atribuye sentido físico a las unas y a las otras. Por ejemplo: en la teoría de los fenómenos electromagnéticos de Poisson y Weber, las leyes de Coulomb, Biot y Savart y de Ampère son la traducción analítica de los hechos físicos fundamentales, y las ecuaciones diferenciales o de derivadas parciales que relacionan los campos eléctrico y magnético en un elemento de volumen con las cargas y corrientes eléctricas allí existentes, o ellos mismos entre sí, quedan reducidas a meros auxiliares de cálculo; mientras en las teorías de Maxwell y Lorentz este conjunto de ecuaciones es la descripción de los fenómenos físicos fundamentales, y en cambio las leyes aludidas se reducen a la expresión abreviada de los resultados ostensibles de procesos reales complejos que escapan a nuestra percepción. Así, en la teoría que nos interesa, la forma de (35, 1) indica que existe para la gravitación un potencial V, análogo al Φ del campo electrostático, y entre él y la densidad de masa ρ_1, la ecuación de derivadas parciales de Poisson

$$\Delta V = -k\rho, \qquad (39, 1)$$

análoga a la (10, 3) del indicado campo. Para la teoría de Newton la ley física fundamental es la (35, 1),



y esta última una expresión analítica que facilita la resolución de determinados problemas (por ejemplo, la forma de equilibrio de una masa continua); en una teoría de acciones gravitatorias por contigüedad ocupa el primer plano en el orden físico (39, 1), mientras (35, 1) será una ley integral que relaciona los extremos de una cadena de fenómenos de cuyos eslabones prescindimos.

Es justo notar que la ventaja incuestionable que poseen las teorías de acción por contigüedad, cuando se atiende a la satisfacción que dan a exigencias filosóficas de nuestro espíritu, viene en parte compensada por la imposibilidad en que nos encontramos de sorprender las referidas acciones elementales, respecto de cuya naturaleza sólo podemos inferir aquello que dejan traslucir los fenómenos complejos que percibimos. Por ello las ecuaciones fundamentales para cualquier teoría de la clase aludida poseen un carácter esencialmente provisional, pues sólo son válidas en tanto sus consecuencias accesibles a la experimentación se verifican por ella. Y cuando el fracaso sobreviene, la reforma de las repetidas ecuaciones se ha de hacer de modo que las nuevas se confundan con las precedentes en primera aproximación.

Clara consecuencia de lo anterior es que, si bien se ha de huír del error en que cayeron quienes confundieron la confirmación experimental de los coro-



larios de la fórmula (35, 1) con la demostración de que las acciones a distancia poseen realidad innegable, también ha de reconocerse criterio adecuado para una primera selección entre las diversas explicaciones posibles de los fenómenos gravitatorios, fundadas en acciones por contigüedad, el que en ellas se obtenga la expresión (35, 1) por vía de integración, al menos dentro de los límites que marcan los errores experimentales y de observación. Tal es el criterio casi único de que se valieron los autores de los diversos intentos de explicación ideados en el pasado siglo.

40. No encuentra cabida en este libro el análisis de tales intentos, que por otra parte ofrece un gran interés para el cabal conocimiento del proceso evolutivo del pensamiento científico. Me limitaré a un rápido bosquejo de su historia, caracterizada por la tenaz resistencia al proceso general de unificación de los agentes físicos, nota la más saliente de la Filosofía natural del pasado siglo.

No es corriente que al abordar cada problema se abran en la Ciencia nuevas vías para el razonamiento. Por el contrario, generalmente se procede por analogía, transportando al nuevo campo métodos que en otros dominios fructificaron ya. Así, no es extraño que para la teoría de la gravitación hayan servido de modelo las de otros fenómenos que tienen semejanza formal con los provocados por la atracción



universal; pero cuyo mecanismo elemental era conocido. En atención a estos fenómenos-modelo, las teorías que nos ocupan pueden clasificarse en *dinámicas* y *electromagnéticas*.

Si se prescinde de la hipótesis de Le Sage y sus modificaciones, que buscaban explicar la atracción entre los cuerpos por el *choque* de átomos etéreos que cruzan el espacio en todas direcciones, con recorridos libres superiores a las distancias interplanetarias, y el consiguiente efecto de pantalla que unos cuerpos celestes desempeñan respecto de otros; aparte de esta teoría propiamente dinámica, todas las restantes agrupadas bajo el mismo apelativo se fundan en analogías hidrodinámicas. Unas veces se ha apelado a las ondas longitudinales que crean las esferas pulsantes de Bjerknes, cuya diferencia de fase es nula, o al menos inferior a un cuarto de período, y que se suponen sumergidas en un medio de compresibilidad nula o despreciable; esferas que se identifican con las últimas partículas de la materia. Otras consideran estos elementos como lugares de destrucción o creación permanentes del flúido universal, que provocan en él corrientes de las cuales nacen, como consecuencia del teorema de la conservación de la cantidad de movimiento, las fuerzas atractivas entre los átomos. Es condición indispensable que actúen todos como sumideros o como fuentes de dicho flúido, uniformidad de conducta equiva-



lente a la identidad de fase impuesta en las hipótesis ondulatorias.

Las teorías electromagnéticas, en la forma en que fueron iniciadas por Mossoti y Zöllner, consideran la gravitación como un efecto residual procedente de un ligero exceso de la atracción de las cargas eléctricas de signo contrario sobre la repulsión de las de igual signo. Partiendo de esta hipótesis se desarrolla una teoría del campo gravitatorio que es la reproducción exacta de la del electromagnético, salvo diferencias en el orden de magnitud de algunos fenómenos, que en el caso de la gravitación pasan a un plano inabordable para los métodos experimentales y aun para la observación astronómica. Así la electricidad, que en sus primeros pasos, cuando era ciencia de fenómenos estáticos, recibió el beneficio de las sugestiones procedentes de la Mecánica celeste, como lógico corolario de la analogía de las leyes de Coulomb con las de Newton, se convirtió en guía de su antigua maestra; y ello no sólo en el modo directo que acabamos de indicar, sino también indirectamente, sugiriendo las teorías más modernas de Abraham, Nordströn y Mie, cuyos modelos de razonamiento se encuentran en la forma que a la teoría del campo electromagnético dió el principio restringido de relatividad, por cuya razón deben incluírse en el mismo grupo que las anteriores, siquiera no partan de hipótesis tan concretas res-



pecto de la naturaleza de las acciones gravitatorias.

Decía más arriba que lo característico de una explicación por acciones de contigüedad o contacto es la traducción del fenómeno físico fundamental mediante ecuaciones diferenciales en que interviene sólo el pequeño mundo que envuelve al punto considerado. De un modo casi absoluto puede afirmarse que la formulación explícita de las ecuaciones diferenciales faltó en todas las teorías dinámicas; pero implícitamente iban contenidas en la atribución al éter de las cualidades indispensables para hacerle intervenir en los fenómenos gravitatorios, y en la forma de conexión establecida entre dicho medio y las partículas materiales dentro de cada teoría. En el grupo de las electromagnéticas el mismo principio de analogía que guió a sus respectivos autores obligaba a la investigación de las ecuaciones diferenciales típicas.

41. Pero dejando este aspecto formal de la crítica de las explicaciones sugeridas para la gravitación, en el cual no podría detenerme sin rebasar los límites que me he impuesto, haré hincapié en sus corolarios más directamente relacionados con la experiencia y la observación.

Si se trata de una acción por contacto debida a la intervención de un medio interpuesto, cual ocurre en todas las teorías dinámicas, es lógico presumir que cuantas circunstancias influyan en la naturaleza



y estructura de dicho medio y en la de los propios cuerpos que sufren la acción, se denuncien en los fenómenos gravitatorios, alterando el valor de $\vec{f}$, y si se adopta para esta magnitud la expresión (35, 1) k no podrá ser una constante universal.

También son aplicables estas presunciones a las teorías electromagnéticas; así las que postulan un efecto residual de las fuerzas eléctricas, como las constituídas tomando por modelo la teoría del campo electromagnético. Recuérdese que el origen de las ideas de Faraday y Maxwell relativas a la interpretación de todos los fenómenos de esta última clase mediante estados del éter definidos por el indicado campo, es la influencia en ellos de la naturaleza de los cuerpos interpuestos. No es, pues, de extrañar que se haya abordado el estudio de estas influencias de varios modos.

En cuanto se refiere a los posibles cambios de la acción con la naturaleza y estructura de los cuerpos entre los cuales se produce, me limitaré por ahora a recordar que los valores de k se han determinado por muchos experimentadores, utilizando variadas substancias, dispuestas en forma que la atracción se orientase de maneras distintas respecto de los ejes cristalinos (cuando se ha tratado de esta clase de cuerpos), sin que parezca denunciarse ninguna diferencia sistemática en dicha constante. Más tarde volveré sobre estos experimentos que llevan a afir-



mar la invariabilidad de k, aunque cambie la naturaleza y estructura de los cuerpos, por ser este resultado de capital importancia en la teoría de Einstein.

No han tenido mayor éxito los intentos dirigidos a denunciar una intervención del medio, que ya dije fué en el Electromagnetismo origen de las ideas que barrieron las acciones a distancia. Por esto no es de extrañar que en la mayoría de dichos intentos se hayan tomado como modelos experimentos clásicos en Electricidad. Así, operaron Austin y Thwing, Cremieu y Erissmann, buscando cambios sensibles en la atracción de dos cuerpos al interponer otros de naturaleza variada; pero siempre los resultados fueron negativos, siquiera en ocasiones errores sistemáticos, al principio no reconocidos, llevaron a pensar en la existencia de tales cambios.

También cabe pensar en la absorción de la energía gravitatoria que se propaga a traves del medio, absorción que evidentemente se reflejaría en una disminución de la fuerza $\vec{f}$ que el cuerpo testigo sufre. Analíticamente diríamos que a la ecuación de Newton es menester agregarle un factor exponencial correspondiente a tal absorción convirtiéndola en

$$f = \frac{k}{4\pi} \frac{m_1 m_2}{r^2} e^{-\alpha r},$$

donde α es el coeficiente de absorción del medio. Ya



Laplace pensó en esta posibilidad, y en atención a la magnitud de las diferencias que la observación denuncia entre los resultados previstos por la fórmula de Newton y los movimientos reales del sistema Sol-Tierra-Luna, dedujo que α ha de ser inferior a $\frac{1}{6,3} \times 10^{-14}$. También por consideraciones teóricas de este género se llegó a presumir por Neumann y Seeliger la presencia de estos factores exponenciales en la ley de Newton. Con su auxilio puede evitarse la incompatibilidad manifiesta entre la teoría de la gravitación que se funda en esta ley y la idea, arraigada en nuestro espíritu, de un mundo extendido hasta el infinito, asunto de sugestión innegable sobre el cual insistiré más adelante. Pero la investigación directa de la realidad de esta absorción de la energía del campo gravitatorio no ha sido abordada hasta bien recientemente, en que Q. Majorana ha investigado los cambios en el peso de una esfera de plomo de 1274 gr., según que se halle envuelta o no por una masa de mercurio de 104 kg. La diferencia total de peso, en el sentido que sería de presumir, alcanza a 98×10^{-5} mgr., cuyo error probable no lo estima Majorana en más de 16×10^{-5} mgr., no obstante la pequeñez de dicha magnitud. De este resultado se deduce para valor de α en el mercurio $9,15 \times 10^{-10}$, y suponiendo que la influencia ejercida en él por la naturaleza de la materia sea proporcional a su



densidad, ρ, se obtiene para la constante universal $\varkappa = \frac{\alpha}{\rho} = 6{,}73 \times 10^{-12}$.

Una consecuencia interesante de la absorción de la energía gravitatoria, que Majorana señala con alguna reserva, es la transformación en calor de dicha energía perdida, si es que el principio de conservación ha de mantenerse. Por simples consideraciones termodinámicas se deduce entonces que un aumento de temperatura del cuerpo en que esta absorción se produce debe disminuir aquella pérdida de energía; o dicho en otros términos, la atracción gravitatoria debe tener un coeficiente positivo de variación con la temperatura. Es de notar que en trabajos experimentales recientes, P. E. Shaw encuentra un efecto que, cualitativamente al menos, coincide con el previsto por dicho corolario. Dos masas de plomo de unos 47 kg. cada una, actúan sobre otras dos pequeñas de plata, rígidamente unidas y suspendidas por un hilo cuya torsión compensa y mide aqnella atracción. Calentando las masas de plomo entre 15° y 215°C. aumenta ésta en $1{,}20 \times 10^{-5}$ por cada grado centígrado. En cambio, anteriormente Poynting y Phillips, de una parte, y Southerns de otra, han buscado infructuosamente cambios de peso de una pequeña masa cuya temperatura se hizo variar por los primeros entre — 186° y + 100°C. Según estos experimentos, el coeficiente de temperatura no podría ex-



ceder de 10^{-9} ó 10^{-10}, y realmente la hipótesis de absorción prevé para este caso variaciones completamente despreciables.

Recientemente H. N. Russell ha sometido la hipótesis de la absorción de Majorana, con el valor deducido de sus experimentos para el coeficiente α, al contraste de la observación, calculando los efectos que deben producirse por esta causa en determinados fenómenos astronómicos. Cuando se admite que la absorción no afecta a la masa de inercia, como parece ser el pensamiento de Majorana, sino sólo a la ley de atracción, es menester modificar la tercera ley de Kepler, introduciendo un factor: por él se modifica en 1,04 por 100 el radio medio de la órbita de Júpiter y en 0,63 el de la del asteroide Eros. Además, en la teoría de la Luna la acción perturbatriz del Sol sería triple de lo que prevé la Mecánica celeste clásica, y en la de las mareas se adicionarían nuevas acciones más de ochenta veces superiores a las más grandes que pueden ocurrir según la teoría de Newton. Es notoria la incompatibilidad de estos resultados con la observación, que no admite un coeficiente α superior a una diezmilésima del valor que le asigna Majorana. Y no se gana gran cosa suponiendo que también la masa de inercia cambie por efecto de la absorción, de modo que se conserve la proporcionalidad con la gravitatoria, pues se deducen entonces valores teóricos para las mareas, cuya discordancia



con la observación es casi tan notable como en el supuesto anterior, siendo menester reducir α por bajo de dos diezmilésimas del valor de Majorana para restablecer el acuerdo, conservando la hipótesis de la absorción en esta segunda forma. Todo lo que precede induce a pensar al astrónomo americano que, de confirmarse los experimentos del físico italiano, han de interpretarse suponiendo que la masa de un cuerpo cambia realmente por la proximidad de otro.

42. La influencia de la naturaleza de los cuerpos y del medio que los separa en la magnitud de las acciones gravitatorias no es criterio bastante seguro para discernir entre los dos tipos de acciones obrando a distancia o por contacto. Porque, en efecto, estas influencias, caso de existir, podrían interpretarse imaginando un efecto análogo a las polarizaciones eléctrica y magnética, igualmente interpretables por aquellos dos tipos de acciones.

Tiene mayor eficacia el estudio de la velocidad de propagación c_1. Las acciones por contigüedad requieren un tiempo, grande o pequeño, para manifestarse fuera del cuerpo que las produce, mientras las acciones a distancia suponen simultaneidad del agente con el efecto. En otros términos: la velocidad es finita en el primer supuesto, e infinitamente grande en el segundo.

La pequeñez de las fuerzas gravitatorias, y más fundamentalmente el que sean siempre atractivas, li-



mita la alteración de sus valores locales a la obtenible por cambios de posición de las masas, los cuales son siempre lentos por imposiciones de orden técnico. Y como la apreciación de los efectos así provocados escapa a la sensibilidad de la experimentación actual, el determinar la velocidad aludida resulta inabordable en nuestros laboratorios. Cerrado este camino, sólo ha quedado expedito el estudio de los fenómenos que la finitud de c_1 puede provocar en los movimientos del sistema planetario, donde el tamaño de las masas y el valor de sus velocidades rebasan todas las posibilidades de la experimentación, al propio tiempo que la exactitud de las observaciones astronómicas que sirven de fundamento a los cálculos es pocas veces alcanzado por la Física.

Desgraciadamente, estas ventajas se hallan compensadas, y aun sobrepujadas, por los inconvenientes que proceden de la imposibilidad de disponer las cosas de manera que los efectos investigados resalten y vengan a ocupar el primer término en los datos de la observación. Lejos de esto, para juzgar del valor de las hipótesis que puedan formularse respecto al modo de intervenir una posible velocidad de propagación en los fenómenos gravitatorios, únicamente se dispone de las perturbaciones residuales anteriormente señaladas; a más, naturalmente, de la condición elemental de no conducir a nuevas anomalías que rompan la concordancia ya establecida entre

la observación y la teoría. Y de la indeterminación con que el problema se presenta da idea la variedad de puntos de vista que han sido posibles para abordarle.

Así, Lehmann-Filhis y Hepperger limitan el papel desempeñado por la velocicad c_1 a una diferencia de tiempo entre el instante en que la acción nace en el cuerpo atrayente y aquel en que se manifiesta en el atraído, conservando para su valor numérico la expresión (35,1); mientras Laplace razona en forma análoga a como se hace en el estudio de la velocidad de la luz, de modo que la velocidad v_1 del movimiento de este último cuerpo impone una componente proporcional a la relación $\frac{v}{c_1}$ que actúa en dirección opuesta a $\vec{v}$. Estos métodos conducen a valores fantásticos para c_1, que, según los cálculos de Laplace, necesitaría exceder de 10^7c; pero también se ha intentado la interpretación de los efectos residuales a que aludía antes, tomando como modelo para la teoría de las acciones gravitatorias entre las masas en movimiento las leyes de la Electrodinámica en la forma que les atribuyera Weber, en las cuales interviene la velocidad de propagación de manera esencial. Lévy ha demostrado que, de modo más o menos artificioso, se puede lograr la interpretación del más notable de aquellos efectos residuales (movimiento de la órbita de Mercurio) identificando las



dos velocidades de la Gravitación y la luz. Esta identidad de valores es además premisa obligada de las teorías que parten del principio restringido de relatividad, puesto que *c* es un límite superior de la velocidad, y de ser inferior a este número, sus efectos no habrían pasado desapercibidos en Astronomía. Dicho se está que las estimaciones hechas por Laplace y cuantos otros han utilizado de una u otra manera los métodos de la Ciencia clásica no son objeción atendible contra la precedente premisa, puesto que, según señaló Poincaré, la aproximación que ella consiente a las leyes naturales es insuficiente.

El rápido recuerdo que precede de las ideas vertidas respecto de la velocidad de la gravitación tiene por único fin dejar en el lector la impresión de que nada se opone, aun en la ciencia clásica, a la finitud de *c*, librándole de este modo del peso de la autoridad de Laplace.

43. Es llegado el momento de insistir sobre la independencia del valor de *k* respecto de cualquier cambio de la naturaleza físico-química de los cuerpos que intervienen en los fenómenos gravitatorios. Esta independencia significa que la identificación hecha por Newton del coeficiente característico de cada cuerpo en la atracción universal y la masa de inercia, responde exactamente a las exigencias de la realidad. Ya dije anteriormente (§ 35) que esta hipótesis



es fundamental para la teoría de los movimientos del sistema planetario, pero sólo la experiencia puede justificar su adopción.

Naturalmente, basta demostrar la identidad de las masas gravitatoria y de inercia en un caso particular, y por ello podemos utilizar la atracción terrestre con tal fin. Imaginemos cuerpos diferentes en un mismo lugar; la fuerza f que éstos experimentan se llama pesantez. En la hipótesis de que k sea una constante absoluta, podemos descomponer la expresión de f en dos factores: m_2, masa del cuerpo considerado, y

$$g = \frac{k}{4\pi} \frac{m_1}{r^2},$$

que permanecerá invariable en cada lugar de la Tierra. Si las condiciones físico-químicas de los cuerpos influyen en k, es evidente que también harán cambiar g, y por tanto será diferente el peso del mismo sistema antes y después de que en él se produzcan cambios de estado. Por este procedimiento Kreichgauer demostró que los valores de g son idénticos para el acetato sódico amorfo y cristalizado (con un error inferior al $0,5 \times 10^{-7}$), y para las mezclas de mercurio y bromo o de mercurio y iodo comparadas con las sales resultantes de su combinación (con un error inferior a 2×10^{-6}).



Además, si se recuerda que el período de oscilación de un péndulo es

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

se comprenderá que con su auxilio se pueda también investigar la influencia que en la gravitación puedan ejercer las circunstancias a que vengo refiriéndome. Fué este el método elegido por Newton para la comprobación experimental de la hipótesis aludida, requisito indispensable para la identificación de la causa que determinó la caída de la manzana legendaria con las que rigen el movimiento de la Luna y los planetas, según ha hecho notar Burton. Para ello determinó los valores de τ correspondientes a péndulos constituídos por materiales de diferente naturaleza, y resultado de tales experimentos fué la demostración de la constancia de τ mientras l no cambia, ley enunciada en todos los libros elementales de Física, aunque olvidando su verdadera trascendencia. Ciertamente es pequeña la seguridad de dicha ley, pues diferencias de 1×10^{-3} pudieron escapar en los trabajos de Newton, y los posteriores de Bessel no lograron reducir este límite más allá de $0{,}17 \times 10^{-4}$; pero otros métodos conducen indirectamente a ella con una certidumbre que se puede hoy evaluar en 2×10^{-8}.

En el próximo capítulo tendremos ocasión de ver



que la rotación de la Tierra obliga a introducir en las ecuaciones de la Mecánica, relativas a cuerpos que se encuentran en reposo en nuestros laboratorios y se refieren a ejes coordenados fijos en ellos, fuerzas ficticias que se denominan centrífugas y son normales al eje de nuestro planeta, de modo que forman con la atracción terrestre m_2g un ángulo igual a $\frac{\pi}{2} - \lambda$ (λ es la latitud del lugar), y se combinan con ella produciendo un ligero desvío de su dirección. Esta fuerza ficticia, cuyo valor es $f = - m_2\omega^2r$, y por tanto se encuentra libre de las influencias a que g puede estar sometida, permite en ciertas condiciones la aplicación de un método diferencial que denunciaría dichas influencias con una sensibilidad superior a la obtenible por la medida de k o de τ.

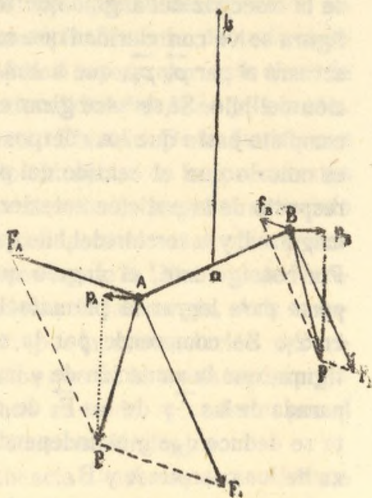


Fig. 20

Sean A y B (fig. 20) dos cuerpos de naturaleza diferente que poseen idéntico peso; esto es, que se



equilibran colocados en los platillos de una balanza ordinaria. Estos dos cuerpos se fijan en los extremos de una varilla rígida, suspendida por un hilo *ab*, cuya prolongación pasa por su centro de gravedad. Sobre A y B actúan: 1.°, las atracciones correspondientes $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$; y 2.°, las fuerzas centrífugas $\vec{f}_A$ y $\vec{f}_B$. Unas y otras, por la misma naturaleza de las cosas, serán paralelas, pero no necesitan ser iguales. En cambio, serán de igual magnitud y distinta dirección los pesos $\vec{P}_A$ y $\vec{P}_B$ resultantes de aquéllas; el hilo *ab* define la bisectriz del ángulo que forman entre sí. En la figura se ve con claridad que sobre el sistema A*a*B actuará el par $\vec{p}_A\,\vec{p}_B$, que habrá de equilibrar la torción del hilo. Si se hace girar el soporte del sistema completo hasta que los cuerpos A y B se permuten, es notorio que el sentido del par $\vec{p}_A\,\vec{p}_B$ se invertirá respecto de la posición anterior, pero sin cambiar de magnitud, y la torción del hilo que lo equilibra será φ. Por consiguiente, el ángulo que ha de girar el soporte para lograr la permutación, diferirá de 180° en 2φ. Se comprende por la sola inspección de la figura, que la anulación de φ implica la igualdad separada de las $\vec{f}$ y de las $\vec{F}$, de donde inmediatamente se deduce que g es independiente de la naturaleza de los cuerpos A y B.

Este es el resultado a que han conducido los experimentos de Eötvös y los más recientes de Zeeman, practicados, según este método, utilizando



cuerpos de naturaleza variada, unos amorfos y otros cristalizados, a pesar de que la sensibilidad de las disposiciones puestas en práctica hubiesen permitido denunciar cambios en g de algunas unidades del sexto o séptimo orden decimal.

Sin duda, rechazar más allá de este límite una posible influencia de la naturaleza de los cuerpos en su acción gravitatoria no es eliminar de un modo absoluto dicha posibilidad; pero la persistencia de los resultados negativos en cuantos intentos se han hecho para denunciarla, justifica que se desespere de lograrlo y se admita como fundamento de toda construcción teórica llamada a interpretar esta clase de fenómenos la proporcionalidad del *peso* y la *masa*. Tal postulado lo formuló Einstein. De la justicia con que se le haya podido extrapolar de los precedentes resultados experimentales, ha de juzgarse aplicando los mismos criterios que para los restantes principios de la ciencia, como los de la Dinámica de Newton, el de la conservación de la energía, el de la entropia, etc. A saber: por la contrastación experimental de los corolarios que de la teoría se desprendan, y también, aunque en modo secundario, por el valor estético de su construcción lógica.

44. Una consecuencia importante se deduce cuando se pone este postulado en relación con uno de los corolarios más transcendentales del principio restringido de relatividad; a saber: la ecuación



$m = \frac{\mathcal{E}}{c^2}$ que define la inercia de la energía. Como el postulado de Einstein no distingue, es notorio que también la energía debe pesar.

Sutherns buscó la necesaria confirmación experimental de esta conclusión determinando el período de un péndulo cuya masa pesante está constituída, una vez, por óxido de uranio; y otra, por un peso igual de óxido de plomo. Estos cuerpos son los productos inicial y final de una serie de transformaciones radiactivas durante las cuales existe una pérdida de energía equivalente a una disminución de masa de $2{,}3 \times 10^{-4}$ gr. por ciento de los elementos puros, o sea para el óxido $2{,}0 \times 10^{-4}$; de suerte que para los pesos iguales con que operó Sutherns la masa del primero debe exceder a la del segundo en $2{,}0 \times 10^{-4}$ por gramo, diferencia que se habría de acusar por un mayor valor del período del péndulo. Sin embargo, éste fué el mismo en ambos casos, a pesar de que la sensibilidad era suficiente para apreciar una diferencia en la masa de 5×10^{-6}, o sea una cantidad cuarenta veces más pequeña de lo previsto.

Comprobada experimentalmente la pesantez de la energía, se deduce una consecuencia de interés capital. Un rayo luminoso contiene en un cierto volumen la energía $\mathcal{E}$, de modo que le corresponderá un peso $\frac{\mathcal{E}}{c^2}$; pero si pesa, al propagarse en una región



donde exista un campo gravitatorio, deberá caer. Esta caída supone, en general, un cambio de dirección análogo al que experimentaría propagándose en un medio de índice de refracción variable, por lo cual es necesario concluir que dicho campo determina un cambio en la velocidad c, en contradicción aparente con el principio restringido de relatividad.

Esta contradicción fué señalada por Abraham como objeción contra las ideas de Einstein; pero ha de notarse que el principio restringido se ha formulado para interpretar los fenómenos electromagnéticos, en cuyas leyes fundamentales la gravedad no figura. Sin duda, esta circunstancia solo representa que el influjo que dicho agente pueda ejercer se halla, en general, más allá del alcance de nuestros métodos experimentales. Por consiguiente, aquellas leyes que traducimos por el sistema de ecuaciones cuya invariancia exige que c sea constante, tienen el carácter de leyes límites, rigorosamente válidas donde la gravedad es nula.

Luego, haciendo caso omiso de la anterior objeción, sólo recordada para salir al paso de posibles errores de interpretación del lector, sigamos un poco más de cerca la marcha de un rayo luminoso en un campo gravitatorio. A este fin cabe que le consideremos a la manera de una serie de pequeñas partículas pesantes ensartadas en el rayo luminoso, que representa la trayectoria común cuando se prescin-



de de sus acciones mutuas. Para que el efecto del campo sobre estas partículas sea lo más grande posible, consideremos el caso en que el rayo luminoso pase cerca de un centro de atracción muy grande, cual el Sol. El valor enorme de la velocidad inicial de estas partículas hace que la trayectoria sea hiperbólica y, además, de gran excentricidad.

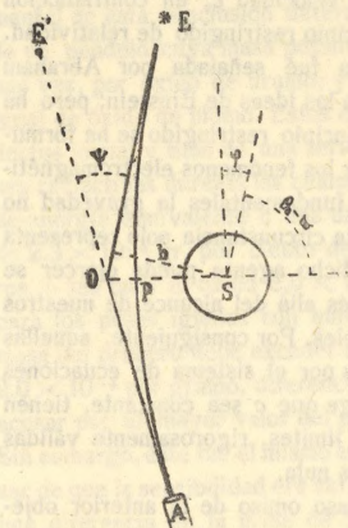


Fig. 21

Sea E una estrella que se proyecta en la bóveda celeste en las proximidades del Sol. Uno de sus rayos, EPA, para llegar al anteojo, describirá la rama de hipérbola que la figura 21 representa, y el observador refiere su posición al punto E′ en que el eje del anteojo prolongado corta a la esfera celeste. Esta recta OA y la OE son las asíntotas de la hipérbola, y el efecto de la atracción solar en la luz se manifiesta por la desviación ψ de la imagen de la estrella alejándose de su posición verdadera. Para



calcular ψ notemos que el ángulo de las asíntotas con el eje OS se obtiene haciendo en (35, 1) $\frac{1}{r} = 0$, de donde se deduce

$$\cos[\theta - \omega] = -\frac{1}{e}.$$

En atención a que $\frac{1}{2}\psi$ es el complemento de $\theta - \omega$, ya que el signo del segundo miembro no tiene aquí interés, podemos escribir

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\psi = \frac{1}{e} = \frac{a}{\text{OS}},$$

donde a es el semieje real de la hipérbola. Si se tiene en cuenta la pequeñez del ángulo ψ, se puede en el primer miembro reemplazar el seno por el ángulo, y en el segundo es fácil demostrar que

$$\frac{a}{\text{OS}} = \frac{k'm}{4\pi c^2 \text{R}},$$

puesto que con el mismo grado de aproximación $\text{R} = \text{PS}$ y $\text{OS} = b$. En definitiva se obtiene

$$\psi = \frac{2km}{4\pi \text{R}}.$$

Así la desviación de la estrella por el Sol varía en razón inversa de R, de suerte que el máximo se producirá cuando R sea mínimo; esto es, cuando el rayo



de luz sea rasante al borde del disco solar. Hechos los cálculos adoptando los valores $k = 7{,}40 \times 10^{-29}$, $m = 1{,}97 \times 10^{-33}$ gr. y $R = 6{,}97 \times 10^{-10}$ cm. se obtiene para ψ en radiantes $4{,}19 \times 10^{-6}$ y en segundos de arco 0″863.

Resumiendo el contenido de este capítulo, podemos decir que la teoría de Newton da la explicación de la inmensa mayoría de las particularidades que se ofrecen en los movimientos del sistema planetario denunciables por la observación, sin que escapen a ella más que los efectos residuales señalados arriba (§ 36). Para salvar esta dificultad, y más principalmente con el fin de eliminar las acciones a distancia, se han realizado diferentes tentativas de modificación de la ley de Newton que responden a ideas teóricas mejor o peor definidas, y en las cuales intervienen coeficientes indeterminados cuyos valores se fijan con vistas a la desaparición de aquellos efectos residuales, o al menos el de mayor importancia de ellos. Sin duda, esto es siempre posible; pero no sin introducir nuevas discordancias entre la teoría y la observación, que compensan las ventajas logradas.

Al aplicar a este género de problemas el principio restringido de relatividad, acabamos de ver que se prevé la existencia de un fenómeno nuevo: la desviación del rayo luminoso. Debemos agregar que



la expresión de la cantidad de movimiento que dicho principio consagra,

$$\frac{m_0 v}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

determina un cambio de la longitud del perihelio en las órbitas de los planetas cuyo sentido coincide con el que la observación señala para Mercurio, pero que sólo alcanza a 7″, en vez de los 43″ que aún quedan como residuo inexplicable por la teoría de Newton (1).

---

(1) En una Memoria póstuma de Eötvös publicada por sus colaboradores cuando este libro está ya en prensa, se ha llevado el límite de un error posible en la proporcionalidad de la masa pesante a la masa de inercia hasta 5×10^{-9}.



CAPÍTULO VI

Teoría de la gravitación de Einstein

45. El principio filosófico de relatividad y la determinación absoluta de la aceleración.—46. Campo de fuerzas equivalente a una aceleración constante en el movimiento rectilíneo.—47. Fuerza centrífuga.—48. Principio general de relatividad.—49. Postulado de equivalencia.—50. Expresión general del intervalo *ds*.—51. Potenciales gravitatorios.—52. Curvatura de la hodócrona y la trayectoria de un punto material libre.—53. Geometría sobre un mundo superficial curvo.—54. Sistemas de coordenadas para una misma variedad: curvatura de la variedad.—55. Cambios de dimensiones de las reglas en un campo gravitatorio. 56. Movimiento de un punto material libre: reducción a la ley de la Mecánica clásica en primera aproximación.—57. Marcha de los relojes y corrimiento de las rayas espectrales.—58. Ecuaciones del campo gravitatorio fuera de la materia.—59. Caso de un punto atrayente único.—60. Consecuencias relativas a la curvatura que determina en el espacio.—61. Cambio de longitud del perihelio de las órbitas.—62. Desviación del rayo luminoso.—63. Crítica de los resultados obtenidos en el eclipse de 1919.



45. No bien enunciado el principio restringido de relatividad, y, sobre todo, una vez asegurada su victoria por una brillante serie de consecuencias confirmadas en el terreno experimental, no podía menos de ofrecerse ante la consideración de las inteligencias sensibles a las preocupaciones de orden filosófico, y entre ellas de modo muy preeminente al propio Einstein, el marcado contraste entre el alcance limitado de dicho principio, que sólo declara la imposibilidad de reconocer por experimentos internos el movimiento de conjunto de un sistema, cuando es uniforme y rectilíneo, y la generalidad con que se impone a nuestra inteligencia la incapacidad de conocer cualquier movimiento absoluto, sea o no uniforme.

Imaginemos nuestro planeta completamente solo en el espacio. Hablar de sus movimientos de conjunto carecería de sentido, puesto que no existirían puntos de referencia. Sin embargo, la ciencia clásica y la nacida del principio de relatividad dan los elementos indispensables para reconocer cualquier aceleración de la Tierra: lo mismo las que proceden de su rotación, denunciadas por los experimentos bien conocidos que se realizan con el girostato y el péndulo de Foucault, que cualesquiera otra que se refiera a su traslación en el espacio.

Concretándome a la Mecánica de Newton, para evitar complicaciones superfluas por el momento,



esta posibilidad de medir el valor absoluto de la aceleración es una consecuencia de los términos de inercia que figuran en todas las ecuaciones del movimiento, y que para el caso de un punto material son de la forma sencilla

$$m\vec{a},$$

llamando m la masa y $\vec{a}$ la aceleración, sea cual fuere su clase. Conviene notar que estos términos los consideró siempre la Mecánica como fuerzas ficticias; esto es, que no tienen por origen acciones procedentes del exterior del sistema que posee la aceleración, aunque son en sus efectos equivalentes a ellas.

Tal equivalencia quita realidad al indicado reconocimiento de la aceleración, puesto que es imposible discernir si los fenómenos en que se apoya son debidos a un cambio en la velocidad o a un campo de fuerzas de naturaleza conveniente. Escoger entre una interpretación u otra, es pura cuestión de comodidad que se resolvería en cada caso por motivos de orden secundario. Acaso se piense que los campos de fuerzas se han de manifestar por la presencia de los agentes que los originen; pero sin negar la existencia de ocasiones en que este criterio es aplicable con evidencia inmediata, es notorio cuán frecuentemente falta o se ofrece en forma discutible.



En definitiva, parece claro que la posibilidad de conocer la aceleración se nos escapa tanto como la de la velocidad de conjunto del sistema de referencia, resolviéndose el contraste señalado entre los dictados de la filosofía y las conclusiones de la ciencia, del modo más en armonía con los gustos de los espíritus de tendencias filosóficas, como el de Einstein.

46. Es conveniente poner en evidencia sobre ejemplos concretos la repetida equivalencia de la aceleración de los ejes coordenados y de un campo de fuerzas, con lo cual se logra, además, fijar los caracteres que a éstos se han de atribuir. Para este fin, dicho se está que los casos de movimiento uniformemente variado y de rotación uniforme han de ser los más adecuados, puesto que en ambos la aceleración es constante.

Imaginemos con Einstein un laboratorio *sui generis:* una caja cerrada en cuyo interior existe el instrumental y personal necesarios para realizar cualquier experimento. Además, la supondremos bastante alejada de todo cuerpo celeste para que los objejos en ella colocados no experimenten ninguna atracción gravitatoria sensible: uno de ellos abandonado en un lugar del espacio libre, sin contacto directo o indirecto con las paredes, permanecerá en él indefinidamente; un péndulo separado de su posición normal, tampoco volverá a ella. Es más, no existiría nin-

gún medio de distinguir las paredes, señalando un piso y un techo: todas son plenamente equivalentes; los objetos ligados a ellas no ejercerán sobre las mismas ninguna clase de presión o tracción.

Pero si se comunica un movimiento uniformemente acelerado a la caja, en dirección normal a dos de sus lados, éstos se convertirán en el techo y el piso del laboratorio. Los objetos que estén libres en su interior, sin conexión ninguna con las paredes, permanecerán en reposo, y así serían vistos por un observador que desde fuera percibiese la realidad de los fenómemos. Pero para los confinados en la caja, imposibilitados de contemplar el mundo exterior, lo único claro es que dichos objetos se aproximan al piso con aceleración constante e igual para todos ellos, cual si existiese un campo de fuerzas normales al mismo. Los cuerpos ligados de algún modo a las paredes, serán arrastrados por ellas, pero también engendrarán fenómenos interesantes que podrán interpretarse como efecto del aludido campo de fuerzas; si están en contacto con el piso, en él ejercerán una presión, y si unidos al techo por un hilo o varilla, éste se encontrará sometido a una tracción; cuando la naturaleza de su conexión le permita moverse alrededor del punto de amarre, a la manera de un péndulo, es fácil ver que las leyes de la Mecánica conducirán a un movimiento oscilatorio.

En más breves términos: aquellos observadores



incomunicados con el mundo exterior y conocedores únicamente de los fenómenos que se producen dentro de la caja, pueden afirmar la existencia de un campo de fuerzas que determina la caída de los cuerpos hacia el piso, con igual derecho que Newton dedujo la existencia de la gravitación partiendo de la caída de la manzana tradicional.

En definitiva, esto significa declarar la *equivalencia* del movimiento real del laboratorio con el campo de fuerzas ficticio que supongo postulan los habitantes del mismo. Pero dicha equivalencia para ser completa ha de ser recíproca, y ello es evidente dentro de la ciencia tal y como se halla constituída. Si en vez del laboratorio alejado de todo cuerpo celeste, a que me he venido refiriendo, imaginamos otro en nuestro planeta, pero sin apoyos exteriores, de modo que caiga libremente y con él los objetos que encierra, cuantos fenómenos se producen en nuestros laboratorios, sólidamente cimentados, como consecuencia de la gravedad, desaparecerán. En su lugar se producirían los mismos que en la caja-laboratorio antes de ponerla en movimiento.

47. Vengamos al otro caso de aceleración constante: el de rotación uniforme, para el cual las velocidades de los diferentes puntos tienen un valor numérico constante, pero una dirección variable. De las dos componentes que antes de ahora (§ 22) dije posee la aceleración: longitudinal y normal, sólo



esta última será diferente de cero, y además constante, puesto que su valor es $r\omega^2$, designando ω la velocidad angular y r la distancia del punto considerado al eje de giro.

Este caso es el de nuestro planeta. Imaginemos que su rotación diurna se ignora y se refieren los fenómenos dinámicos a un sistema de ejes fijos a él. En las ecuaciones que traduzcan los movimientos de cada punto, faltarán los términos correspondientes a la aludida rotación, y la única forma de ponerlas de acuerdo con los hechos será agregar las fuerzas ficticias de inercia equivalentes. Estas fuerzas son de dos clases: las llamadas *centrífugas* a secas, cuya magnitud para un punto de masa m es $-m\omega^2 r$, y las *centrífugas compuestas,* definidas por $-2m\omega v$ sen α, que sólo actúan sobre los puntos que se hallan dotados de la velocidad $\vec{v}$ relativamente a la Tierra, son normales al plano definido por el eje del planeta y la dirección de dicha velocidad, y, además, proporcionales al seno del ángulo α que forman $\vec{\omega}$ y $\vec{v}$.

Si suponemos que este punto material móvil se halla ligado por un hilo inextensible con otro fijo a la Tierra en un lugar de latitud λ, de modo que constituya un péndulo esférico, las referidas fuerzas determinan un giro del plano de oscilación (1) alre-

(1) Más exactamente, del plano que contiene el eje mayor de la elipse descrita por el punto material móvil.



dedor de la vertical del punto fijo, con velocidad angular definida por

$$\omega' = \omega \operatorname{sen} \lambda,$$

o sea la proyección de ω sobre aquella recta. En cuanto al sentido del movimiento, es opuesto al de rotación de la Tierra; de modo que colocado el péndulo en el mismo polo, el giro completo durará veinticuatro horas y la oscilación se producirá en un plano fijo en el espacio, con relación al cual se puede determinar la posición de la superficie de nuestro planeta. Si fuésemos trasladando el péndulo hacia el ecuador, el giro iría siendo cada vez más lento, hasta desaparecer al llegar a aquel círculo geográfico. Por este camino y por algunos otros que omito en gracia a la brevedad, aun supuesto que una espesa capa de nubes cubriese el cielo, imposibilitando su observación, se habría podido descubrir la rotación de nuestro planeta. Mejor diría que el grupo de fenómenos de que vengo ocupándome podría haberse interpretado suponiendo la existencia de la rotación; pues también cabría la posibilidad de admitir que la capa de nubes, o algo que ella ocultase, actuara como agente de un campo de fuerzas que se suma a la gravedad.

Escoger entre ambas interpretaciones es cosa que trasciende de la capacidad de la Mecánica, de suerte que los motivos que guíen la elección han de bus-



carse fuera de ella. Ciertamente, en el caso de que vengo ocupándome no se planteó el dilema en ningún momento, porque estos fenómenos fueron conocidos y estudiados cuando la simple observación del mundo estelar y la confirmación directa del achatamiento polar habían puesto fuera de discusión el movimiento diurno de la Tierra. Tal circunstancia hacía que, propiamente, el experimento de Foucault y sus análogos tuviesen el sencillo valor de una prueba de la justeza de los postulados de Newton; pero el culto que la Mecánica merecía por entonces llevó a considerarlos mejor como un argumento más en pro de la rotación de la Tierra.

48. Precisamente esta equivalencia entre un campo de fuerzas y un movimiento acelerado es lo que constituye la esencia del principio de relatividad sin restricciones. El movimiento absoluto escapa a nuestra percepción, no en el sentido de que ningún fenómeno a nuestro alcance encuentre su origen en él, sino porque es atribuíble con igual derecho a un campo de fuerzas. Estas reemplazan, según ya dije, a los términos de inercia, y por ende tienen un carácter general bien señalado, son proporcionales a la masa de los cuerpos sobre que actúan.

Es de notar que la acción de los campos reales, engendrados por agentes físicos definidos, como el eléctrico y magnético, se miden por el producto de dos factores: uno que define al campo en el lugar



ocupado por el cuerpo sujeto a la acción, y otro característico de este último desde el punto de vista de los fenómenos considerados. Al producto de estos dos factores es a lo que propiamente se llama fuerza, y así la ejercida por el campo eléctrico $\vec{E}$ sobre un cuerpo electrizado con la carga e, es

$$\vec{F} = e\vec{E},$$

y la del campo magnético $\vec{H}$ sobre un imán de momento $\vec{M}$ es en magnitud

$$F = MH \operatorname{sen} \alpha,$$

hallándose dirigida según la normal plano de $\vec{M}$ y $\vec{H}$. Estos factores e y $\vec{M}$, escalares o vectores, son perfectamente independientes de la masa de inercia que los cuerpos respectivos puedan poseer, y definen propiedades físicas de un orden completamente distinto.

Ahora bien: lo característico de los campos ficticios que sustituyen a la aceleración ignorada, es la identidad del factor correspondiente al cuerpo que sufre la acción con su masa de inercia; y así ha de ser, porque en la aceleración del sistema de referencia para nada interviene la naturaleza de los cuerpos cuyos movimientos son objeto de estudio, de modo que la ecuación fundamental de la dinámica,

$$\vec{F} = m\vec{a},$$



debe reducirse a una identidad cuando se sustituye $\vec{F}$ por la expresión que la define.

49. Pero es el caso que el campo gravitatorio, cuya realidad es innegable en el estado actual de nuestros conocimientos, goza de esta misma característica de los campos ficticios, que llamaremos de inercia, hecho que desde la época de Newton se viene aceptando, aunque hasta Einstein no ha sido elevado a la categoría de postulado fundamental de la Ciencia.

Así estamos bien habituados a escribir para el peso de un cuerpo la ecuación

$$p = mg,$$

donde m es la propia masa de inercia y g la *intensidad de la pesantez*, ecuación en que es manifiesta la homogeneidad de g con una aceleración, que ha llevado frecuentemente a asignarle dicho nombre; y por ello mismo es evidente la imposibilidad de separar la parte de esta magnitud correspondiente à la atracción terrestre de la debida al movimiento variado del observador. Y conviene recordar, a propósito de la afirmación precedente, que se trata de una verdad conocida de mucho tiempo atrás: g es una de las constantes físicas más fundamentales, cuya determinación ha preocupado a los geodestas desde que esta ciencia nació. Ahora bien: sea cual fuere el método utilizado para su medida el resultado incluye dos

efectos: la fuerza atractiva de nuestro planeta, o intensidad de la gravedad propiamente dicha, y la fuerza centrífuga originada por su rotación diurna, $-m\,\omega^2 r$. Sólo indirectamente, determinando la velocidad angular $\omega (= 7{,}292 \times 10^{-5})$ y la distancia al eje (r) del punto donde se mide g, cabe separar de esta constante la predicha aceleración. Y aunque es cierto que se trata de un efecto pequeño, ya que en el ecuador $-m\omega^2 r = 3{,}392$, o sea la fracción 0,00347 de la g medida, dista mucho de ser despreciable.

Si esta imposibilidad de separar la atracción efectiva de Newton de cualquier aceleración común a todos los instrumentos y observadores que intervengan en la medida de g, no preocupó hasta hoy a los hombres de ciencia, ello es consecuencia de no haber parado mientes en el interés filosófico que el asunto ofrece. Considerada la constancia absoluta de k como puramente accidental, lo único digno de atención era la posibilidad de eliminar las influencias de aceleraciones conocidas que vienen a comportarse como errores sistemáticos en las medidas, y dicha eliminación podría siempre hacerse de modo análogo a como hemos visto para la centrífuga originada por la rotación terrestre. En cambio, reconocer con Einstein la perfecta equivalencia de la gravitación con un movimiento acelerado del laboratorio en que se estudian los fenómenos engendrados por aquélla, es tanto



como asignarle un carácter relativo, en contraposición con el absoluto que le atribuye la Mecánica clásica.

Desde otro punto de vista tiene trascendencia el postulado en cuestión. Cuantos intentos experimentales se han llevado a término desde la época de Faraday hasta los recientes trabajos de Cremieu, con el fin de encontrar alguna influencia recíproca entre la gravedad y otros agentes físicos, han fracasado. En estas condiciones era imposible prever cómo han de intervenir las constantes propias de la gravitación en las leyes que rigen los fenómenos provocados por dichos agentes, y mientras tal intervención no se fijase, era imposible concluir el proceso de unificación del mundo físico que ya dije caracterizó la Filosofía natural del siglo XIX: la gravitación había de continuar siendo en ella un compartimiento estanco. Este problema lo resuelve el postulado de equivalencia con sólo hallar los cambios que en las referidas leyes naturales se producen cuando se emplea un sistema de referencia acelerado, en cuyo camino no existen obstáculos graves, por tratarse de un proceso meramente cinemático. En el capítulo anterior terminaba estudiando la desviación de un rayo de luz por la gravitación. Es fácil también hacerse cargo de la necesaria existencia de este fenómeno como consecuencia del postulado de equivalencia, si volvemos a la caja-laboratorio del § 46. Si estuviese



fija y un rayo de luz penetrara por un orificio abierto en sus paredes, dibujaría una recta que es visible cuando existen partículas de polvo en la atmósfera, mientras en el caso de movimiento acelerado arriba supuesto el rayo, que es independiente de él, aparecerá como un arco de parábola.

50. Abordemos con mayor atención el estudio de los cambios que determina en las leyes naturales la aceleración del observador, refiriéndonos al invariante elemental del principio restringido

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2. \qquad (50, 1)$$

Dije ya (§ 33) que físicamente representa la inmutabilidad de las reglas y relojes que se utilizan en la medida de los valores propios, $d\lambda$ y $d\tau$, y como para las razones que abonan este supuesto nada significa la clase de movimiento de los ejes, parece lógico continuar afirmando dicha invariancia cuando el nuevo sistema se mueve de cualquier modo respecto del antiguo; o más generalmente, si las relaciones que definen las antiguas coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4 en función de las nuevas z_1, z_2, z_3, z_4, son cualesquiera

$$x_i = f_i(z_1, z_2, z_3, z_4). \qquad (50, 2)$$

Evidentemente se obtiene para las diferenciales dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, expresiones de la forma

$$dx_i = \frac{\partial f_i}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial f_i}{\partial z_2} dz_2 + \frac{\partial f_i}{\partial z_3} dz_3 + \frac{\partial f_i}{\partial z_4} dz_4,$$



que han de sustituirse en (50, 1). Ordenando respecto de las potencias y productos de las dz_i el coeficiente de uno cualquiera de ellos, por ejemplo, del $dz_i\ dz_j$, será de la forma

$$g_{ij} = \frac{\partial f_1}{\partial z_i}\frac{\partial f_1}{\partial z_j} + \frac{\partial f_2}{\partial z_i}\frac{\partial f_2}{\partial z_j} + \frac{\partial f_3}{\partial z_i}\frac{\partial f_3}{\partial z_j} + \frac{\partial f_4}{\partial z_i}\frac{\partial f_4}{\partial z_j}.$$

Resulta en definitiva en vez de (50, 1)

$$\left.\begin{array}{l} ds^2 = g_{11}dz_1^2 + g_{22}dz_2^2 + g_{33}dz_3^2 + g_{44}dz_4^2 + \\ + 2g_{12}dz_1dz_2 + 2g_{13}dz_1dz_3 + 2g_{14}dz_1dz_4 + \\ + 2g_{23}dz_2dz_3 + 2g_{24}dz_2dz_4 + 2g_{34}dz_3dz_4 \end{array}\right\}, \quad (50, 3)$$

que puede escribirse de modo abreviado,

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}\, dz_i dz_j, \qquad (50, 3)$$

indicando que es una suma de términos que se obtienen dando a i, j los valores 1, 2, 3, 4, con la condición de que $g_{ij} = g_{ji}$.

El conjunto de estas cantidades g_{ij}, que satisfacen a la condición (50, 3); esto es, tales que puedan utilizarse como coeficientes de los términos cuadrados y rectangulares de una forma cuadrática en las dz_i, invariante para toda transformación de coordenadas, se llama *tensor simétrico de segundo orden*. Si $g_{ij} \neq g_{ji}$, el tensor no será simétrico y en (50, 3) estarán desdoblados los sumandos que contienen el coeficiente 2.



Alguna vez he de referirme al determinante

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} \qquad (50, 4)$$

que los analistas llaman *discriminante* de (50, 3), y que en virtud de la condición $g_{ij} = g_{ji}$ es simétrico. También he de referirme a las 10 magnitudes g^{ij}, que representan los menores de (50, 4) divididos por el propio g, y que son igualmente las componentes de un tersor.

Conviene señalar que el grado de generalidad representado por el grupo de ecuaciones de transformación (50, 2) es de tal modo grande, que las nuevas variables z_1, z_2, z_3, z_4 no admiten la separación en espacio y tiempo, que he dicho son dimensiones heterogéneas del Universo. De aquí se desprende que aquella generalidad es excesiva y que físicamente será preferible restringir la libertad de elección del sistema de referencia de modo que sea posible discernir en el intervalo ds las aportaciones del espacio y el tiempo, según representa

$$ds^2 = d_\lambda{}^2 - f^2 d\tau^2, \qquad (50, 5)$$

donde

$$\left. \begin{array}{l} d\lambda^2 = \gamma_{11} dz_1^2 + \gamma_{22} dz_2^2 + \gamma_{33} dz_3^2 + \\ + 2(\gamma_{12} dz_1 dz_2 + \gamma_{13} dz_1 dz_3 + \gamma_{23} dz_2 dz_3) \end{array} \right\}; \qquad (50, 6)$$



de modo que $d\lambda$ mide un segmento espacial, proyección de ds.

Si volvemos al mundo lineal del § 30, la forma (50, 5) del invariante nos dice que las hipérbolas equiláteras de entonces pierden este carácter y sus asíntotas formarán con τ un ángulo cuya tangente es f. Estas asíntotas son también aquí las hodócronas de los rayos luminosos que se propagan en los dos sentidos posibles del mundo lineal. Si se pasa al superficial o al espacio ordinario, las hipérbolas se convierten en hiperboloides de una y dos hojas, que en general no serán de revolución. Estas superficies, que Lorentz ha llamado *indicatrices,* determinan las unidades con que deben medirse los intervalos en las diferentes orientaciones si se han de obtener sus valores propios. Pero cuando se ha elegido un sistema de ejes de referencia, lo cual significa tanto como adoptar el punto de vista de un observador particular, las unidades para cada coordenada se encuentran haciendo coincidir la regla métrica con los ejes respectivos, y así de (50, 3) y (50, 6) se deduce que

$$dz_i = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{ii}}} \qquad d\tau_4 = \frac{1}{f}.$$

Las indicatrices definen de manera más intuitiva que los valores de g_{ij} o γ_{ij} y f, las características esenciales del sistema de referencia, pues mientras



permanezcan invariables, poco importan los valores de dichos coeficientes; ello no significa más que un cambio en los ejes a los cuales referimos las superficies en cuestión. Así, para que la forma del invariante ds^2 sea (50, 5) basta que los ejes sean diámetros conjugados de los hiperboloides, mientras la forma (50, 3) es consecuencia de la adopción de cuatro diámetros que no cumplen aquella condición.

51. Puesto que el principio de equivalencia afirma la imposibilidad de discernir entre un campo gravitatorio y una aceleración del observador, según se comprende sin dificultad por el ejemplo del § 46, es notorio que cuanto acabamos de decir ha de aplicarse a la expresión de ds^2, cuando las mediciones necesarias se efectúan por un observador sin aceleración, pero situado en un campo de aquella clase. Así se escribirá también

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dz_i dz_j; \qquad (50, 3')$$

pero aquí los coeficientes g_{ij}, y las indicatrices correspondientes, definen el campo en cuestión en vez de la naturaleza del movimiento de los ejes, y se les ha llamado *potenciales gravitatorios* en atención a que g_{44}, según tendré ocasión de señalar, se encuentra íntimamente ligado a la magnitud que recibe este nombre en la teoría clásica.



Aunque nada dije concretamente, se deduce de la generalidad del grupo de transformación (50, 2) que los coeficientes g_{ij}, y sus equivalentes γ_{ij} y f, son funciones de las variables z_i; cosa evidente cuando corresponden a un campo gravitatorio, puesto que éste cambia con el lugar del espacio y con el tiempo, en virtud de la distribución heterogénea de la materia y del movimiento de los cuerpos. Por consiguiente, las indicatrices se irán deformando cuando se pasa de un dominio elemental a otro, y sólo el valor del intervalo ds, que corresponde a una entidad física, permanecerá invariable sean cuales fueren las unidades que hayan de emplearse en cada uno de dichos dominios.

Precisamente esta deformación continua de las indicatrices a través del Universo, imposibilitando que pueda imaginarse un movimiento de conjunto de un sistema de referencia capaz de interpretar en bloque todos los fenómenos provocados por la gravitación, es la prueba de que el campo de fuerzas correspondiente traduce la existencia de una realidad física, cuya investigación equivale a dar una teoría de aquellos fenómenos.

52. Para llegar a este resultado comencemos considerando un proceso finito que empieza y termina con los sucesos A y B, en una región libre de todo campo gravitatorio y empleando un sistema de ejes sin aceleración. En el § 35 se ha visto que de



todos los imaginables existe uno para el cual

$$\delta \int_A^B ds = 0,$$

de modo que el intervalo entre A y B es mínimo, y su representación en el Universo es la recta que une entre sí aquellos puntos. Como esta propiedad es independiente del sistema de referencia, en atención a la invariancia de ds, representará siempre una ley natural, cuyo caso más interesante es aquel en que la recta aludida es una hodócrona, pues entonces

$$\delta \int_{A_1}^{B_1} d\tau = 0 \qquad (52, 1)$$

traduce analíticamente la ley de inercia, según se vió en el apartado que citaba.

Pero si ahora imaginamos que el movimiento del punto material libre, cuya ley es (52, 1), se estudia por un observador, O, con aceleración diferente de cero, d_τ^2 adopta una de las formas (50, 3) o (50, 5), sin que deje de cumplirse por ello la condición (52, 1). Según el principio de equivalencia, podemos decir otro tanto cuando existe un campo gravitatorio que afecte al dominio del Universo donde se extiende la hodócrona considerada.

Lo mismo para el observador O que para el campo gravitatorio la hodócrona deja de ser recta, y cuando las variables se eligen de modo que sea posible la se-



paración del espacio y el tiempo, como en (50, 5), la trayectoria del punto cuyo elemento es d_σ, será también curva. Esta es la interpretación general de la desviación del rayo en la caja-laboratorio de que hablaba poco más arriba, o de la trayectoria parabólica que describiría a juicio de sus habitantes una masa puntual que penetrase en ella con velocidad uniforme.

Precisamente los argumentos de orden dinámico en que se apoya la doctrina de la atracción universal se reducen a la curvatura de la trayectoria de los cuerpos lanzados al espacio y libres de toda acción de origen conocido. Como la Mecánica clásica postula que esta curvatura denuncia un campo de fuerzas, es necesario buscar el agente que lo engendra entre las circunstancias que acompañan al fenómeno, camino por el cual fué conducido Newton a la hipótesis de la atracción mutua de los cuerpos. Pero estas fuerzas son de una clase *sui generis*, puesto que la masa de inercia es el único factor que regula su acción en cada caso, sea un cuerpo material o una onda electromagnética. Los demás campos de fuerzas que conocemos se conducen de modo totalmente distinto, pues los cuerpos que sufren la acción intervienen en su magnitud mediante un factor característico, como señalé en el § 48.

53. La interpretación que Einstein ha dado a esta oposición entre el campo de fuerzas gravitatorio y



todos los restantes que juegan en los fenómenos físicos, ofrece serias dificultades de comprensión porque no es posible auxiliarnos con imágenes. Por ello necesitamos recorrer un camino más largo en gracia de la claridad de los conceptos, deteniéndonos en la descripción de los fenómenos que se ofrecerían a un ser inteligente que habitase un mundo superficial; esto es, con solas dos dimensiones. Para simplificar el lenguaje le llamaremos *homoide*.

Supondremos que su geometría la construye utilizando los mismos postulados de Euclides, de modo que será idéntica a nuestra Geometría plana. Para comprobar su valor como ciencia de la Naturaleza podrá trazar en su mundo figuras que respondan a otras bien definidas de dicha geometría y comparar los resultados obtenidos midiendo sus elementos con los teoremas de aquella ciencia. Por ejemplo: los que establecen la igualdad a dos rectos de la suma de los ángulos de un triángulo; la relación $\pi = 3,1415\ldots$ entre la circunferencia y su diámetro, etc... Si las medidas a que aludía condujesen a estas mismas relaciones, nuestro homoide pensaría con plena razón que la geometría construída se ajusta a la Naturaleza, pero nosotros sólo deduciríamos que el mundo en que vive es un plano, o se puede desarrollar en él sin deformar las figuras en cuestión.

En efecto: cuando esta última condición no se cumpla podemos prever que los referidos teoremas



no quedarán confirmados por la experiencia. Basta que fijemos la atención en un caso particular. Admitamos que el mundo del homoide es una superficie esférica, y que en ella dibuja una circunferencia definida como el lugar de los puntos ABD... equidistantes del centro P (fig. 22). Para nosotros la curva en cuestión es un círculo menor de polo P, y la línea que el homoide considera radio, en atención a ser la más corta distancia desde P a un punto A de la circunferencia, sabemos que es el arco de círculo máximo que pasa por ambos, mayor que el verdadero radio CA. Es notorio que la relación de las longitudes de aquellas líneas no puede ser igual a π, y esta es efectivamente la conclusión a que el homoide llegaría.

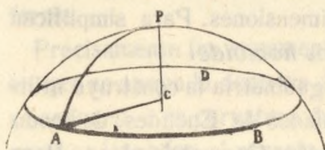


Fig. 22

Otros varios teoremas fallarían del mismo modo, y nuestro ser hipotético se encontraría frente a este dilema: o desecha la Geometría euclidiana y construye otra fundándose en postulados convenientes para obtener la conformidad entre su ciencia y los resultados experimentales, o agrega a las dos dimensiones que percibe una nueva, para él imposible de imaginar, pero gracias a la cual podrá formarse el concepto de superficie esférica contenida en el es-



pacio de tres dimensiones; concepto que, según decía, no irá acompañado de una imagen que aclare sus ideas.

Es interesante notar que este mismo dilema se habría ofrecido a los geógrafos que en otra época suponían la Tierra plana, si hubiesen llegado a realizar mediciones bastante precisas en figuras de extensión suficiente trazadas en la superficie del planeta. Pero su posición frente al problema habría sido opuesta a la que lógicamente adoptaría el homoide. Porque nosotros percibimos las tres dimensiones del espacio, y además la geometría de la esfera estaba ya construída en su parte más interesante en aquella época, de modo que los geógrafos aludidos habrían caído en la cuenta de su error al atribuir forma plana a la Tierra. Por otra parte, la posibilidad de una Geometría no euclidiana escapaba totalmente a su ciencia.

En cambio, suponemos al homoide con pleno dominio de los principios filosóficos de la nuestra, de suerte que las únicas limitaciones en su capacidad de conocer proceden de la imposibilidad de representarse la tercera dimensión. En tales condiciones es probable que buscase la Geometría más adecuada para la coordinación de sus experimentos.

No creo necesario insistir mucho para llevar al ánimo del lector el convencimiento de que nuestro homoide tropezaría con dificultades similares a las señala-



das, cuando su mundo fuese una superficie curva diferente de la esférica. En la mayoría de los casos serían aún más graves, pues los caracteres de la discordancia entre las propiedades métricas experimentales de las figuras por él dibujadas y los teoremas de la Geometría de Euclides no se conservarían idénticos a sí mismos en todas las regiones del mundo en cuestión.

54. Consideremos un poco más de cerca los métodos con cuyo auxilio el homoide puede venir en conocimiento de que no habita una superficie plana. Los elementos geométricos entre los cuales existen las relaciones que ha de comparar con los teoremas euclidianos puede obtenerlos, bien midiéndolos directamente con la regla que haya elegido para unidad de longitud, en la forma que he supuesto en el apartado anterior, bien cubriendo su mundo con una red de referencia, gracias a la cual cada punto se define por dos coordenadas y la distancia entre dos de ellos se obtiene mediante una función conocida de las diferencias entre las coordenadas respectivas.

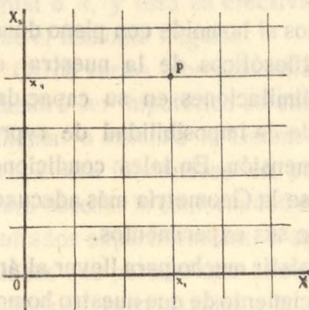


Fig. 23

Tomemos como ejemplo el caso de un plano. Antes de ahora hemos visto que sus puntos se pueden determinar trazando dos rectas perpendiculares (*ejes* OX_1 y OX_2 de la fig. 23), y adoptando para coordenadas de P los segmentos Ox_1 y Ox_2 que en los ejes determinan las perpendiculares a ellos desde P. Podría decir también que se suponen trazadas en el plano dos familias de rectas paralelas a cada uno de los repetidos ejes, de tal modo que llenen toda la superficie; esto es, que para cada valor numérico de x_1 existe una paralela a OX_2 que intercepte en OX_1 un segmento igual a él, contado a partir de O. Entonces las rectas de cada familia se distinguen por un número, x_1 y x_2, y el punto P se determina por las dos que en él se cortan. Así entendido el sistema de coordenadas, nada se opone a que se reemplacen las familias de rectas por familias de curvas también caracterizadas por un número (valor del *parámetro* correspondiente), y siempre P se determinará por la intersección de dos de

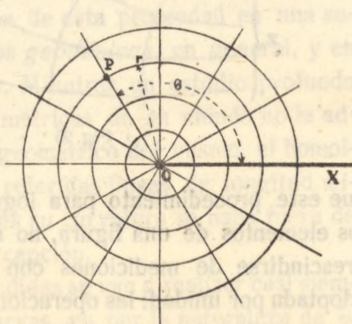


Fig. 24.



ellas, una de cada familia. Tal es el caso de las llamadas coordenadas polares, donde se utiliza el haz de rectas cuyo vértice es O y las circunferencias de centro en el mismo punto (fig. 24); el parámetro correspondiente a una de aquéllas es el ángulo θ que forma con un eje OX elegido una vez para todas, y el de las circunferencias su radio *r*. Se podrían escoger otras varias redes de referencia que pueden ser convenientes para la resolución de problemas determinados, pero no vale la pena de insistir sobre estas nociones que son bien evidentes. Unicamente agregaremos

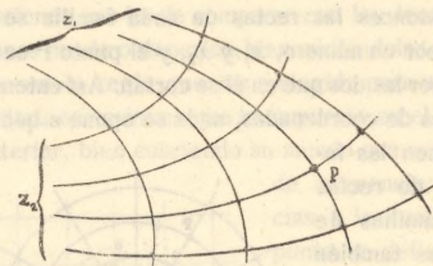


Fig. 25

que este procedimiento para lograr los valores de los elementos de una figura, no supone que pueda prescindirse de mediciones con una regla patrón adoptada por unidad: las operaciones necesarias para comparar directamente el elemento de longitud considerado con esta regla, se reemplazan aquí por las

indispensables para el trazado de la red de referencia.

Es evidente que el mismo método puede aplicarse a la definición de los puntos de una superficie cualquiera y deducir las relaciones entre los elementos de las figuras en ellas dibujadas; bastará trazar dos familias de líneas (fig. 25) caracterizadas por sendos parámetros, z_1, z_2, que serán las coordenadas del punto P. Así sobre una esfera aquellas líneas pueden ser los meridianos y paralelos, cuyos parámetros son la longitud λ y la latitud φ.

Vengamos ya a la distancia entre dos puntos. Es de advertir que esta distancia se ha de contar sobre la superficie en que aquéllos se encuentran, tal y como podría ser medida por el homoide; de modo que la regla métrica se deslizaría sobre la línea de menor longitud entre las que unen los dos puntos. Las líneas que gozan de esta propiedad en una superficie las llamamos *geodésicas*, en general, y en el plano son *rectas*. Mientras un estudio profundo de las propiedades métricas de su mundo no le advierta del carácter geométrico del mismo, el homoide pensará que las referidas líneas de longitud mínima son rectas, pues su curvatura se halla fuera de su capacidad de percepción.

Puesto que las medidas se van a realizar casi siempre a lo largo de curvas, ya por la naturaleza de la superficie, ya por la red de referencia elegida, la



regla patrón debe considerarse infinitamente pequeña, de suerte que los puntos cuya distancia puede medir directamente han de ser infinitamente próximos. La expresión general de dicha distancia, ds, en función de la diferencia infinitesimal de las coordenadas de sus extremos, dz_1 y dz_2, es

$$ds^2 = g_{11}dz_1^2 + 2g_{12}dz_1dz_2 + g_{22}dz_2^2, \quad (54, 1)$$

donde las g_{ij} son funciones de las z_i, cuya forma depende de la naturaleza de la superficie y también de la red de referencia. Así en el caso del plano, si se adoptan las coordenadas cartesianas

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2, \quad (54, 2)$$

mientras si se acude a las polares

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2; \quad (54, 3)$$

en la esfera, cuando la red de referencia la integran los meridianos y círculos de latitud

$$ds^2 = d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\lambda^2. \quad (54, 4)$$

Conviene fijar la atención en que, según decía, las g_{ij} son funciones diferentes, para la misma superficie, según la red o sistema de coordenadas que se haya escogido. Sin embargo, la ambigüedad que



así resulta para la expresión de ds^2 tiene un límite, pues la teoría de las superficies llega a establecer una relación entre las g_{ij} propias de cada sistema de referencia, que es característica de la superficie, o, como también se dice, una propiedad intrínseca de la misma: por ende, invariante para toda transformación de coordenadas. Tal es la *curvatura* de Gauss.

Dejando a un lado el fijar cuantitativamente esta noción (1) y apoyándome en el concepto intuitivo que de la palabra subrayada tiene cualquier persona culta, he de poner de relieve algunas circunstancias por demás interesantes, mediante las siguientes observaciones:

1.ª Un valor determinado de la curvatura sólo es compatible con un número limitado de formas asignables a la expresión de ds^2. Por ejemplo: sobre la esfera no es posible elegir la red de referencia de modo que adopte las formas (54, 2) o (54, 3).

2.ª La recíproca no es cierta. El que en dos superficies puedan utilizarse redes cuyas expresiones (54, 1) son idénticas, no significa que posean las mismas cualidades geométricas. Para las superficies plana, cilíndrica, cónica, y más generalmente, para toda desarrollable, pueden las redes ser tales que ds^2 adopte las formas (54, 2), (54, 3), y todas las demás que al plano corresponden, aunque nadie es capaz

(1) Véase la nota II del Apéndice.



de confundirlas. El homoide no podrá, pues, averiguar por este camino en cuál de las referidas superficies habita; y otro tanto le ocurriría si pretendiese distinguir entre cualesquiera otras superficies mutuamente adaptables sin deformación.

Claro es que el contenido de esta observación puede también expresarse diciendo que la curvatura de Gauss puede tener idéntico valor en superficies inconfundibles geométricamente, circunstancia que lleva a comprender que este concepto no corresponde de modo acabado a la noción vulgar de superficie curva. Por ejemplo: que la curvatura del plano sea nula se halla de perfecto acuerdo con aquella noción; pero que se cumpla la misma condición en el cilindro está en evidente oposición con ella.

3.ª Cuando antes me he referido a la imposibilidad de adoptar una forma cualquiera de (54, 1) en una superficie determinada, he debido agregar «válida sobre regiones finitas de la misma». En una porción infinitamente pequeña cabe siempre escoger la expresión que nos plazca para ds^2. Para una explicación más detallada imaginemos un punto P en una esfera. Nada se opone a que la red de referencia adoptada sobre la superficie completa sea tal que en las vecindades de P las líneas que la forman se confundan con círculos máximos perpendiculares. Entonces la distancia de P a un punto infinitamente próximo tiene la forma (54, 2). Pero atendiendo a



(54, 4) se cae en la cuenta de que esto significa que $\varphi = \frac{\pi}{2}$, de modo que equivale a escoger las coordenadas esféricas de suerte que P se halle sobre el ecuador: si de él salimos, no será posible aplicar (54, 2), mientras (54, 4) conserva su validez. Lo que acabo de decir significa que manteniéndose en una región infinitamente pequeña es imposible distinguir la naturaleza de una superficie, cual ocurría a los geógrafos a que aludía más arriba. En este caso es posible, y también conveniente, dejarse guiar por razones de comodidad en la elección, lo cual justifica que aquéllos imaginaran plano el planeta, y que el homoide hiciese la misma hipótesis respecto de su mundo mientras el dominio a que extendiese sus observaciones y experimentos, o la precisión que en ellos alcanzara, no rebasase ciertos límites. Geométricamente esto significa que se reemplaza la superficie real por su plano tangente.

4.ª Aunque acaso sea superfluo, advertiré que en general la curvatura de Gauss cambia de un punto a otro, de modo continuo. Los casos en que su valor es constante, como en el plano y la esfera, son excepcionales.

5.ª La curvatura de Gauss se manifiesta también en una propiedad interesante que ha sido utilizada por Levi-Civita como una especificación de ella generalizable al caso de variedades matemáticas de



más de tres dimensiones. En la Geometría de Euclides dos segmentos rectilíneos son paralelos cuando forman ángulos iguales con una recta que los corta, de modo que para transportar paralelamente a sí mismo uno de aquéllos, basta cuidar que las posiciones sucesivas cumplan con dicha condición respecto de la recta que los une; este es, al fin y a la postre, el sistema que sigue un delineante cuando dibuja un rayado utilizando la regla y el cartabón. Ahora bien: ya dije que para el homoide son rectas las líneas geodésicas de la superficie en que vive, de modo que cuando desease transportar una reglilla paralelamente a sí misma, le bastaría hacer que en cada dos posiciones formase ángulos iguales con la geodésica que pasara por ambos. Entonces es fácil demostrar que si partiendo de P se obliga a la reglilla a describir un contorno cerrado que le vuelve a P, las posiciones inicial y final no son en general idénticas, sino que forman un ángulo dependiente del recorrido hecho. Así, para una esfera, y suponiendo que el indicado contorno sea un triángulo formado por circunferencias máximas, el ángulo en cuestión es igual a su exceso esférico, o sea su área multiplicada por la curvatura de Gauss de la esfera $\left(K = \frac{1}{R^2}\right)$. Así la superposición completa de las dos posiciones de la reglilla en P sólo se produce en el caso de ser nula esta curvatura; que equivale a decir que es una pro-



piedad exclusiva de aquellas superficies en que la geometría de las figuras es la de Euclides (plano).

En lo que precede van señalados algunos criterios con los cuales el homoide podría reconocer la curvatura de su mundo; o también la disconformidad de la geometría experimental con la deducida de los postulados de Euclides. Ciertamente, le faltaría toda representación imaginativa con que esclarecer aquel concepto, pero llegaría a formarse una idea justa del mismo que le permitiría razonar con claridad y derivar las propiedades métricas características de su espacio.

55. Vengamos de nuevo a nuestro propio Universo. Vimos anteriormente que para un observador con movimiento variado el intervalo tiene la forma

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dz_i dz_j,$$

irreductible a la expresión cuasi-euclidiana

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2.$$

El principio de equivalencia dije también que obliga a la afirmación de que otro tanto ocurre con los campos gravitatorios; de modo que el fracaso de la Geometría euclidiana, aun extendida en la forma indispensable para incluir la métrica del Universo de la relatividad restringida, es inevitable. Y claro es que dicho fracaso alcanza a la Geometría del espacio



ordinario, pues al separar en ds^2 las aportaciones correspondientes a los intervalos de longitud y tiempo, $d\lambda^2$ y $d\tau^2$, según (50, 5), la forma (50, 6) de $d\lambda^2$ es también irreductible al elemento euclidiano

$$d\lambda^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

De un modo más intuitivo puede llegarse a la misma conclusión, en cuanto al espacio se refiere, llamando la atención sobre los cambios que las reglas métricas han de sufrir en un campo de fuerzas de inercia en virtud de las consecuencias que se derivan del principio restringido. Utilizaré para este fin el mismo ejemplo de Einstein. Acudamos nuevamente a nuestro homoide y supongamos que su mundo sea plano, pero dotado de un movimiento de rotación uniforme alrededor de un eje normal en 0. Nada le denunciará cinemáticamente la rotación; pero podrá apreciar un campo de fuerzas centrífugas, creciente en proporción a la distancia de 0, y que podrá sin inconveniente atribuir a la atracción de masas ignoradas que se distribuyen sobre el borde lejano del plano.

Supongamos, además, que ha trazado figuras geométricas, cuyos elementos mide para comparar las relaciones numéricas que entre ellos encuentra con las establecidas partiendo de los postulados de Euclides. Tomando el ejemplo más sencillo en las con-



diciones de la hipótesis, Einstein supone un círculo con centro en 0, del cual se mide la circunferencia y el diámetro. En el primer caso, el observador, fijo en 0, ve la regla empleada más corta a consecuencia del movimiento longitudinal debido al arrastre del plano, y tanto más corta cuanto mayor el radio del círculo, puesto que v crece con él. De modo que aquella circunferencia vendría expresada por un número mayor que el que se obtendría con el plano en reposo. En cambio, cuando se mide el radio, la longitud aparente de la regla permanece la misma, puesto que su posición es normal al movimiento. Es, pues, notorio que la relación de la circunferencia al diámetro será *mayor que* π, en oposición al teorema bien conocido de la Geometría de Euclides.

En un campo gravitatorio engendrado por una masa material que ocupa el punto 0, las cosas ocurrirán en cierto modo de manera opuesta, pues las reglas se ven acortadas cuando se disponen según los radios, e invariables si se colocan normalmente a ellos. Basta recordar la comparación entre la caja que se traslada con movimiento uniformemente variado fuera de toda acción gravitatoria, y nuestros laboratorios fijos en la superficie de la Tierra. Los radios marcan ahora la dirección en que existe una velocidad, o lo que a ella equivale, y, por tanto, aquella según la cual se produce el acortamiento de las reglas. Por el contrario, en el sentido de las cir-

cunferencias concéntricas en O permanecerán invariables, con lo cual es evidente que la geometría de las figuras dibujadas en el campo referido sería del género de aquellas que un homoide que habitase sobre la superficie de una esfera tendría que aplicar a las suyas. Correspondiendo a la curvatura de la esfera, existirá aquí una relación entre los coeficientes γ_{ij}, que es la misma sea cual fuere la red de líneas de referencia que se adopte, y a este invariante lo podemos también llamar curvatura de nuestro espacio, aunque es notorio que estamos tan incapacitados para formarnos una imagen de este concepto como lo estaría el homoide para la propia de su mundo superficial.

No está de más recordar que la presunción de la curvatura del espacio no es de esta época. Ya Gauss y Lobatschewsky se plantearon este problema e intentaron resolverlo por la observación: el primero, utilizando las medidas geodésicas de un triángulo de grandes dimensiones cuyos vértices fueron Brocken, Hohenhagen e Inselberg, y cuyos lados tienen longitudes de 69, 85 y 197 kilómetros. Los resultados fueron negativos, porque las diferencias que pueden esperarse entre la suma de los ángulos de dicho triángulo y π está muy lejos del alcance de los métodos de observación de su tiempo, ni aun de los actuales. Lobatschewsky acudió, con igual resultado negativo, al estudio de la paralaje estelar que, *ad-*



mitiendo la propagación rectilínea de la luz, no obstante la curvatura del espacio, habría de ser mayor que un cierto valor límite cuando dicha curvatura es negativa, y podría llegar a disminuir por bajo de cero si fuese positiva. Sin duda la hipótesis subrayada, que equivale a suponer el proceso de transmisión de la luz ocurriendo fuera del espacio, es insostenible, y al eliminarla desaparece la posibilidad misma de encontrar diferencias de la naturaleza de las previstas.

56. Los razonamientos del apartado precedente sugieren la necesidad de la curvatura del espacio; pero no pueden considerarse como pruebas irrefutables de ella, ni dan los elementos necesarios para determinarla cuantitativamente; para ello es indispensable acudir al estudio de los movimientos que en él se producen, observados en condiciones de precisión suficiente. Volvamos por un momento al mundo superficial de curvatura conocida. Un punto material lanzado en él, y después libre de toda acción, describe con velocidad lineal constante una de las geodésicas de la superficie: así lo demuestra la Mecánica clásica. Para los homoides habitantes de dicho mundo, que ignoran su curvatura, estas líneas dije ya que son rectas, de suerte que ellos afirmarán el postulado de inercia de Newton. Pero si siguen indefinidamente a un punto material en movimiento libre, pueden hallarse sorprendidos viéndole retornar

15



al lugar de partida o a sus proximidades. Por ejemplo, cuando el mundo fuese esférico, puesto que sus geodésicas serían círculos máximos. Estas o parecidas circunstancias le llevarían a comprender que no habitan en un plano.

Algo equivalente ha de ocurrir en nuestro espacio si realmente es curvo, y por ello interesa conocer las ecuaciones del movimiento de un punto fuera de todo campo real de fuerzas, tales y como han de ser para conservarse independientes de la aceleración que pueda poseer el observador. En virtud del principio de equivalencia, dichas ecuaciones serán las mismas que corresponden al movimiento en un campo gravitatorio.

Partiendo de la condición de mínimo

$$\delta \int d\tau = 0 \qquad (56, 1)$$

que caracteriza a la hodócrona del punto, y utilizando métodos de cálculo bien conocidos, pero cuyo detalle escapa de los límites de este libro, se deduce para las ecuaciones que buscamos

$$\frac{d^2 z_i}{d\tau^2} = \sum_{\mu\nu} \Gamma^{i}_{\mu\nu} \frac{dz_\mu}{d\tau} \frac{dz_\nu}{d\tau}, \qquad (56, 2)$$

donde $\Gamma^{i}_{\mu\nu}$ representa una función de los coeficientes g_{ij} y sus derivadas.



Explícitamente

$$\Gamma^{i}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial z_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial z_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial z_{\alpha}} \right),$$

en la cual las $g^{i\alpha}$ son los menores del determinante (50, 4) divididos por g, según hube ya de advertir (50).

El signo $\sum$ del segundo miembro de (56, 2) comprende 16 sumandos, puesto que μ y ν figuran con los valores 1, 2, 3, 4, combinados de todas las maneras posibles, y como los símbolos $\Gamma^{i}_{\mu\nu}$ contienen 12 términos cada uno, resulta para cada ecuación un total de 192. Por lo demás, la especificación del movimiento de un punto requiere 4 ecuaciones de la forma (56, 2), que se distinguen por el valor de i. Entre ellas y las propias de la Mecánica de Newton, la diferencia fundamental es la complejidad del segundo miembro. El primero representa las componentes de la *aceleración propia* del punto, puesto que $d\tau$ es el tiempo propio.

Por otra parte, aquella complejidad desaparece cuando nos conformamos con la aproximación lograda por la Ciencia clásica en el conocimiento de la Naturaleza. Y no podía ser menos, porque la teoría de Einstein aspira a ser una traducción fiel de la realidad, y ha sido mediante la observación de ella como se llegó hasta las ecuaciones de Newton. Esto quiere decir:



1.° Que la matriz (50, 4) de los coeficientes g_{ik} debe diferir muy poco de la

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{vmatrix} = -1 \qquad (56,3)$$

que corresponde a la expresión de $d\tau$ en un espacio euclidiano, con cuyos elementos respectivos deben coincidir las g_{ik} en primera aproximación. También las g^{ik} diferirán muy poco de los valores que se deducen de (56, 3).

2.° Que las derivadas respecto del tiempo (z_4) de los mismos coeficientes son despreciables (campo gravitatorio estático), porque las duraciones de los fenómenos que observamos son sobrado pequeñas para que se haga ostensible en su decurso cualquier cambio del campo. Naturalmente, el caso es otro cuando se trata de las derivadas respecto de las coordenadas espaciales, pues es notorio que los cambios de la gravitación con el lugar son perfectamente sensibles.

3.° El valor de la velocidad en los movimientos que se ofrecen las más de las veces a la Mecánica, he dicho repetidamente que es muy pequeño comparado con c, de modo que β^2 en $d\tau = dz_4 (1-\beta^2)^{1/2}$ es



despreciable, con lo cual

$$\frac{dz_4}{d\tau} = 1, \quad \frac{dz_i}{d\tau} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

claro es que dentro de la aproximación permitida por los medios de observación a nuestro alcance.

Por esta última condición no quedará en el segundo miembro de (56, 2) más que el término

$$\Gamma^i_{44}\left(\frac{dz_4}{d\tau}\right)^2 = \Gamma^i_{44};$$

y como, además, las dos primeras reducen el símbolo Γ^i_{44} a $-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial \tau}$, las referidas ecuaciones se convierten en

$$\frac{d^2 z_i}{d\tau^2} = -\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{1}{2} g_{44}\right), \qquad (55, 5)$$

cuya forma es idéntica a las leyes del movimiento de un punto material pesado, sin que en él actúen fuerzas extrañas. Por otra parte, esta ecuación, unida a la primera condición de las arriba enumeradas, obliga a escribir

$$g_{44} = 1 - 2V, \qquad (56, 5)$$

donde V es el potencial ordinario de la gravitación. De aquí procede el nombre que dimos a los coeficientes g_{ik}.



57. Esta expresión del coeficiente g_{44} se puede someter al contraste de la observación. Supongamos, en efecto, dos relojes idénticos fijos en puntos donde el potencial gravitatorio tenga los valores V y V′. La identidad de naturaleza de los relojes impone la condición $d\tau = d\tau'$, y el estado de reposo en que ambos se encuentran exige que para cada uno $dz_1 = dz_2 = dz_3 = 0$. Por consiguiente,

$$g_{44}dz_4^2 = g'_{44}dz'^2_4,$$

o también

$$(1-2\mathrm{V})^{\frac{1}{2}} dz_4 = (1-2\mathrm{V}')^{\frac{1}{2}} dz'_4.$$

De modo que para un mismo observador, sea cual fuere, los dos relojes no marchan isócronamente.

Refirámonos al caso concreto en que los dos puntos considerados están en las superficies del Sol y de nuestro planeta. El campo gravitatorio en el primer punto se reduce al engendrado por la masa m de aquel astro. Su potencial es $\frac{km}{4\pi \mathrm{R}}$, designando por R el radio solar, de suerte que el valor numérico será $2{,}12 \times 10^{-6}$.

Para la superficie de la Tierra la distancia es 215R, de modo que prácticamente $\frac{km}{4\pi r}$ se reduce a 1×10^{-8}. Es necesario agregar el potencial de la



atracción terrestre, en atención a la pequeñez relativa de la distancia al centro, igual a $\frac{R}{109}$. Como además la masa de la Tierra es $m' = 3{,}29 \times 10^{-5} m$, se obtiene para el potencial $7{,}12 \times 10^{-9}$. En definitiva, pues, V′ es inferior a 2×10^{-8}, de suerte que

$$\frac{dz_4}{dz'_4} = \left(\frac{1-2V'}{1-2V}\right)^{\frac{1}{2}} = 1{,}0000021_0,$$

y el reloj del Sol tendrá una marcha más lenta que el de la Tierra.

La confirmación de esta consecuencia de la teoría exige el empleo de un reloj cuya muestra sea visible desde nuestro planeta, condición que llenan los átomos. La invariabilidad de su constitución, denunciada por la de las frecuencias características de las rayas espectrales, ha permitido demostrar la identidad de composición elemental de todos los cuerpos celestes, y desde largo tiempo atrás sugirió el empleo de los referidos períodos como unidades naturales de tiempo.

Para leer la marcha de estos relojes basta determinar la frecuencia de sus radiaciones por el espectrómetro, y la confirmación buscada se encontrará comparando esta constante para átomos idénticos situados en el Sol y en nuestros laboratorios. Los incrementos relativos del período y de la longitud de



onda son iguales, de modo que en el espectro solar debe producirse un corrimiento hacia el rojo definido por $\delta\lambda = 2,10 \times 10^{-6}\lambda$. Suponiendo que se trata de la zona límite entre el espectro visible y el ultravioleta, donde λ es del orden 4000 UÅ, $\delta\lambda = 0,008$ UÅ, de modo que el efecto previsto corresponde ya a los cambios de λ para cuya apreciación es menester acudir a los métodos más precisos de la espectrometría.

Desgraciadamente, ha de agregarse aún que son múltiples las causas de error que pueden engendrar efectos de esta magnitud en un laboratorio tan agitado como el Sol, cuyas condiciones son manifiestamente diversas de las del arco eléctrico, foco luminoso que sirve de comparación. La presión del gas en que el átomo emisor se encuentra, llega a producir cambios del mismo orden de magnitud, también hacia el rojo, con sólo aumentar aquélla en una atmósfera; el movimiento del foco en la dirección del rayo luminoso, y alejándose del observador con velocidad de unos 600 metros por segundo, basta igualmente para producir corrimientos comparables en virtud del efecto de Dopler-Fizeau. Y estas velocidades, que apenas son diez veces superiores a las que adquieren los vientos tempestuosos, deben ser frecuentemente rebasadas en la envoltura gaseosa del Sol, donde se producen los inmensos torbellinos que se perciben como manchas de su super-

ficie. Han de agregarse los efectos de la dispersión anómala, de los fenómenos de Zeeman y Stark, del mecanismo de absorción de la luz y otras varias condiciones que alteran el valor de λ, o simplemente la distribución de la luz en la banda estrechísima, pero de ancho apreciable, que llamamos una raya espectral.

No obstante estas dificultades, el problema ha sido abordado y continúa en estudio. Para ello corrientemente se ha procurado utilizar rayas en que los experimentos de laboratorio no han denunciado influencia de la presión; tal es el caso de las que integran las llamadas bandas del cianógeno, que además han sido observadas en diferentes regiones del disco solar, particularmente en el centro y el limbo, para disminuir las probabilidades de una influencia sistemática del movimiento. Schwarzschild, St. John, Evershed, Grebe y Bachen han realizado importantes observaciones, cuya interpretación ha provocado largas discusiones. Parece innegable la existencia de un corrimiento en el sentido previsto por la teoría, pero su magnitud cambia de unas rayas a otras, y, por término medio, es sólo de un orden mitad del previsto. Grebe y Baschen creen encontrar la explicación de las discordancias en el empleo indiferente de rayas cuya pureza es muy desigual, estimando necesario concretarse a aquellas que posean la cualidad indicada en el mayor grado,



pues conviene no olvidar que la comparación se realiza entre el espectro de emisión en el arco y el de absorción del Sol, de modo que pueden existir diferencias en la distribución de la luz, en las rayas de uno y otro que produzcan un corrimiento ficticio. Además, Grebe, comparando los resultados para 100 líneas de las referidas bandas en el intervalo 3858-3870, medidas en el Sol por Rowland y en el arco por Uhler y Patterson, ha obtenido un corrimiento medio de 0,0063 UÅ que, corregido de la diferencia encontrada por St. John entre los rayos procedentes del centro y del borde del Sol, dan 0,0082 UÅ, en exacta coincidencia con el número de Einstein.

De todas suertes, la masa general de las observaciones denuncia un cambio de λ del mismo sentido previsto, sin que haya explicación para él fuera de la teoría de Einstein.

Dicho se está que la comparación se ha realizado también con otras rayas espectrales, y a este propósito debe citarse el estudio de Perot sobre las rayas del magnesio, cuyos resultados acaso sean el más sólido argumento que hoy puede aducirse en pro del fenómeno que nos ocupa. Perot encuentra que los coeficientes de presión de las rayas b_1 y b_2 del espectro de aquel metal son diferentes y guardan una relación de 1,55, gracias a la cual se dispone de un verdadero manómetro para medir la pre-



sión de la atmósfera solar en la capa donde se producen dichas rayas. Por este método se encuentra que la referida presión es nula, y, por tanto, todo el corrimiento de las rayas citadas es muy probable tenga por origen el efecto de Einstein. Y de acuerdo con tal supuesto, el valor numérico del mismo es de 0,013 UÅ, mientras la teoría da 0,011.

Buisson y Fabry, aceptando que las rayas del Fe se produzcan en la misma capa que las del Mg, han calculado también sus anteriores medidas (1909) interferenciales, y encuentran como valor madio de $\delta\lambda$ para 22 rayas de $\lambda = 4000$ a 4500 UÅ, 0,0076 en vez de 0,0089, y para 10 comprendidas entre $\lambda = 5100$ y 5500, 0,0127 en lugar de 0,0111. Las diferencias entre los resultados previstos y observados son, pues, de 0,001 UÅ, y, por consiguiente, se hallan en los límites de la incertidumbre de las medidas.

Aunque ciertamente no pueda afirmarse que la observación pruebe de modo innegable el corrimiento de las rayas espectrales por efecto de los cambios en el potencial gravitatorio, es absolutamente insostenible que le sea radicalmente adversa. Sin duda existe un efecto del signo y magnitud que la teoría prevé y cuya interpretación no parece encontrarse en las causas hoy conocidas de alteración de las longitudes de onda. Además, a medida que el tiempo transcurre es notorio el apagamiento de los entusiasmos con que los detractores de la teoría



se aferran al pretendido fracaso de esta predicción.

58. Volviendo a prender el hilo del razonamiento que dejé cortado para hablar de la posible confirmación de la teoría por el corrimiento de las rayas espectrales, parece claro que las ecuaciones del movimiento (56, 2) de un punto libre, obtenidas como consecuencia del principio (56, 1), satisfacen todas las exigencias de la observación y la experiencia, puesto que se reducen a las mismas (56, 4) de la Ciencia clásica cuando nos colocamos dentro de los límites que señala la sensibilidad de nuestros aparatos de medida.

Evidentemente, para que las nuevas ecuaciones (56, 2) permitan deducir resultados concretos referentes al movimiento libre de un punto material, es indispensable fijar los valores de los potenciales gravitatorios, g_{ik}, ni más ni menos que se hace por la teoría de Newton. Pero en ésta se resuelve el problema mediante la ley de la atracción universal que da para el potencial gravitatorio una suma de términos $\frac{km}{4\pi r}$, donde m es la masa de cada punto atrayente y r la distancia a que se encuentra del que sufre la acción, y ahora las g_{ik} se determinan fijando la curvatura del Universo, que es propiedad que afecta sólo a las vecindades del lugar ocupado por el móvil. En efecto: notemos que existen 10 potenciales gravitatorios g_{ik}, de modo que su determi-



nación completa requiere otras tantas ecuaciones. Pero es el caso que la teoría de la curvatura (1) de una variedad de cuatro dimensiones, obtenida generalizando la correspondiente a las superficies, se llega a un grupo de 10 ecuaciones diferenciales de segundo orden en las g_{ik}, consideradas en tal caso como componentes del *tensor de curvatura*. Simbólicamente las representaremos mediante

$$G_{ik} = 0. \qquad (58, 1)$$

Si estas 10 ecuaciones fuesen independientes, definirían de modo unívoco a las g_{ik} y no habría más que un sistema de referencia. Pero en el Universo, como en las superficies, esto no es exacto: según afirma el principio de relatividad, existen infinidad de sistemas de coordenadas esencialmente distintos, y, sin embargo, equivalentes. Por tanto, las ecuaciones (58, 1) han de reducirse a seis mediante cuatro identidades que las relacionen entre sí.

Sin duda la curvatura que definen las (58, 1) es una consecuencia de las propias masas que hace intervenir la ley de Newton; pero en la nueva teoría su influencia se ejerce sólo por acciones de contacto, mediante la deformación del espacio que mide aquella curvatura. Así pudieran compararse estas

(1) Nota segunda del Apéndice.



acciones a las que se ejercen sobre partículas flotantes en un líquido, en virtud de los cambios de tensión superficial provocados por el encorvamiento de la superficie libre en sus proximidades.

Cualquiera que sea el grado de sugestividad que envuelva la adopción de las ecuaciones (58, 1) para definir las g_{ij}, ha de tenerse bien presente que su aceptación definitiva ha de supeditarse a la confirmación de los corolarios de ellas deducidos. Es ésta dificultad inherente a todas las teorías de acción por contigüedad.

Un primer argumento en su favor se logra comparándolas con la ecuación de Laplace para la teoría de Newton, que en atención a (56, 5) puede escribirse

$$\Delta\left(\frac{1}{2}g_{44}\right)=0;$$

cuya característica es contener las derivadas segundas linealmente. Las primeras derivadas y la propia función g_{44} figuran o no, según las coordenadas que se elijan.

Ahora bien: las ecuaciones (58, 1) son de la forma

$$\left.\begin{aligned} G_{ij}=\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial z_{\alpha}}\Gamma_{ij}^{\alpha}+\sum_{\alpha\beta}\Gamma_{i\alpha}^{\beta}\Gamma_{i\beta}^{\alpha}+ \\ +\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}\log\sqrt{-g}+\sum_{\alpha}\Gamma_{ij}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial z_{\alpha}}\log\sqrt{-g}=0 \end{aligned}\right\}(58,2)$$



que por la significación de los símbolos Γ^{α}_{ij} (§ 56) y de g (50, 4), es notorio posee las propias características de la laplaciana. Además, cuando nos concretamos a la aproximación considerada en el § 56, es fácil ver que se confunde con ella; de suerte que toda la teoría de Newton aparece como una primera aproximación de esta de Einstein. Las diferencias entre ambas han de buscarse en los efectos de segundo orden al alcance de la observación.

Para preverlas es necesario resolver el complejísimo sistema (58, 2), cuya dificultad es bien manifiesta si se tiene en cuenta que cada ecuación contiene 24 términos en las Γ^{α}_{ij}, cada una de las cuales encierra 12, y, además, el número total de ellas que figura distribuído en las 10 ecuaciones, es 40. No es exagerado decir que si este problema se plantea con toda generalidad, su resolución alcanza las fronteras de lo sobrehumano, pero no hay medio de escapar a la dificultad, porque hoy sabemos que las ecuaciones (58, 2) son las únicas que satisfacen a las condiciones características de la laplaciana y que, por ende, pueden degenerar en ella en una primera aproximación.

Felizmente, cabe alguna simplificación cuando se dispone acertadamente de la libertad que viene a concedernos la elección de las coordenadas. Primeramente cabe constreñir las g_{ij} a la condición de que su determinante g conserve el valor -1 que corres-



ponde al (56, 3) del espacio euclídeo, con lo cual desaparecen los términos en $\sqrt{-g}$.

En segundo lugar, es posible conservar la separación del espacio y el tiempo, lo cual supone el cumplimiento de las tres condiciones

$$G_{i4} = 0. \quad (i = 1, 2, 3)$$

Naturalmente, con esto habremos dispuesto de toda la libertad de que gozábamos, y las ecuaciones (58, 1) serán ahora un sistema perfectamente determinado para deducir los potenciales gravitatorios.

59. Otro tipo de simplificación puede provenir de la naturaleza del problema que se plantee. Acudamos como ejemplo al caso más sencillo, equivalente al problema de los dos cuerpos que Newton abordó primero en la *Mecánica celeste*: un punto material que se mueve en el campo de una masa puntual. Diríamos en el lenguaje propio de las ideas fundamentales de Einstein: curvatura del espacio provocada por una masa puntual. Este es el problema que ha de resolverse para hallar la trayectoria de un planeta en presencia del Sol, sin acciones perturbatrices.

La solución completa de este problema no se ha encontrado, pero tampoco es necesaria, pues basta conocer los valores de las g_{ik}, o, particularmente, de las γ_{ik} y f^2 con la aproximación exigida por la Astro-



nomía. Es de notar, primero, que $f^2 = g_{44}$, de modo que, dentro de aquella aproximación, según (56, 5) y § 36,

$$f^2 = 1 - 2\frac{km}{4\pi r}. \qquad (59, 1)$$

Por otra parte, la simetría esférica que el campo gravitatorio debe ofrecer para este caso concreto, lleva a adoptar para las γ_{ik} funciones exclusivamente de r, de modo que, despreciando términos de orden superior al primero en $\frac{1}{r}$,

$$\gamma_{ik} = \delta_{ik} + \alpha\frac{z_i z_k}{r^3}. \qquad (i, k = 1, 2, 3) \; (59, 2)$$

En atención a la condición primera del § 56, δ_{ik} representará la unidad cuando $i = k$, y será nulo siempre que $i \neq k$. En cuanto a α, la condición $g = -1$ obliga a darle el valor $\frac{2km}{4\pi}$.

Se obtiene, pues,

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dz_4^2 -$$

$$-\left[\left(1 + \alpha\frac{z_1^2}{r^3}\right) dz_1^2 + \left(1 + \alpha\frac{z_2^2}{r^3}\right) dz_2^2 + \left(1 + \alpha\frac{z_3^2}{r^3}\right) dz_3^2 + \right.$$

$$\left. + \alpha\frac{z_1 z_2}{r^3} dz_1 dz_2 + \alpha\frac{z_2 z_3}{r^3} dz_2 dz_3 + \alpha\frac{z_3 z_1}{r^3} dz_3 dz_1\right]. \; (59, 3)$$



El razonamiento esbozado, por el cual se llega a esta expresión de $d\tau^2$, indica que no se halla determinada unívocamente, ni siquiera podemos aducir en su favor razones de preferencia. La condición $\sqrt{-g} = 1$ tiene ventajas incuestionables cuando se trate de problemas generales del campo gravitatorio, pero en otros concretos puede obligar a cálculos demasiado largos. La misma fórmula (59, 3) es menos sencilla que la

$$\left.\begin{aligned} d\tau^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dz_4{}^2 - \\ - \left\{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2\right\} \end{aligned}\right\} \quad (59, 4)$$

a que se llega mediante el uso de las coordenadas polares r, θ y φ, con el punto de masa m como origen, para las cuales $\sqrt{-g} = r^2 \operatorname{sen} \theta$ en vez de la unidad.

60. Como no podía menos, estas expresiones del intervalo ponen en evidencia la imposibilidad de aplicar la geometría de Euclides al espacio donde existe un campo gravitatorio. Refirámonos a la determinación experimental de la relación de la circunferencia al diámetro, cuando el centro de aquélla es el punto ocupado por m. Para ello se ha de emplear una reglilla cuya longitud propia es $d\lambda$: aplicada a la circunferencia, que puede suponerse dibuja-



da en el plano ecuatorial del sistema de referencia (59, 4), previo el cambio de signo que corresponde a la sustitución de $d\tau$ por $d\lambda$, dará $d\lambda = rd\theta$ y la longitud total será $2\pi r$. Si se la hace coincidir con el radio $d\lambda = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{-1/2} dr$, de suerte que el valor numérico del diámetro para el sistema en cuestión, será mayor que $2r$, y la relación buscada menor que π.

No está de más advertir que las discordancias entre estas relaciones métricas experimentales y las previstas por la geometría de Euclides, sólo pueden apreciarse en condiciones excepcionales. Basta observar que cuando m es la masa solar, $1{,}97 \times 10^{33}$ gr., $\alpha = \frac{2km}{4\pi} = 2.92 \times 10^5$ cm., de modo que ya en la superficie de dicho astro $\frac{\alpha}{r} = 4{,}19 \times 10^{-6}$ y $\frac{d\lambda}{dr}$ sólo difiere de la unidad en 2×10^{-6}. Para puntos más alejados, la diferencia disminuye de tal modo que al llegar a la órbita de Mercurio

$$\frac{\alpha}{r} = \frac{2{,}92 \times 10^5}{58 \times 10^{11}} = 50 \times 10^{-9} \text{ o } \frac{d\lambda}{dr} = 1.000000025.$$

Es interesante señalar que el mismo ejemplo de relaciones métricas en el espacio a que vengo refiriéndome, denuncia que la hipótesis de una masa m



concentrada en un punto, no puede responder a ninguna realidad, puesto que para hallar la longitud del radio sería menester integrar $d\lambda = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{1/2} dr$ desde $r = 0$ al valor correspondiente a la circunferencia, y dicha integración es imposible. Sin detenernos en razones analíticas, basta observar que nuestra reglilla de longitud propia constante, $d\lambda$, al irla resbalando cantidades dr sobre el radio vector r, según se realiza en todas las mediciones de esta clase, y llegar a las proximidades de la circunferencia de radio α, avanzaría cada vez menos sin alcanzarla nunca, porque la constancia de $d\lambda$ exige la anulación simultánea de dr y $\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{1/2}$. Pero mucho antes de que tal ocurra, habremos alcanzado la superficie exterior del Sol, y las ecuaciones (58, 1) tendrán que ser reemplazadas por otras más complejas, a que más tarde me referiré; de suerte que los coeficientes g_{ik} que figuran en las expresiones del intervalo (59, 3) o (59, 4), no son aplicables. Para que la dificultad señalada se presentara dentro de los límites en que dichas ecuaciones son válidas, sería menester que m fuese más de dos millones de veces superior a la del Sol, ocupando igual volumen, o sea que la densidad fuese tres millones de veces mayor que la del agua.

61. Así, pues, la alteración de la métrica del es-



pacio ocupado por nuestro sistema planetario, tomando como término de comparación la propia de un espacio euclídeo o plano, es insignificante. Sin embargo, bastan para transformar en una curva cerrada la trayectoria de un punto material libre, que en éste sería una recta. Sus ecuaciones diferenciales se obtienen sustituyendo en las cuatro (56, 2) los valores de las g_{ik} que figuran en (59, 3) o (59, 4).

Pero ya la simetría del fenómeno revela que si se adopta para plano ecuatorial del sistema de coordenadas polares aquel definido por la dirección de la velocidad del punto en un momento cualquiera, $d\varphi$ será constantemente nula. Esta circunstancia convierte una de las ecuaciones en una identidad, y, además, reduce (59, 4) a la forma más sencilla

$$d\tau^2 = \gamma dz_4^2 - \frac{1}{\gamma} dr^2 - r^2 d\theta^2, \qquad (61, 1)$$

si se designa por γ el paréntesis $\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)$. Esta relación entre las dz_4, dr, $d\theta$ y $d\tau$, puede sustituir a otra de las tres restantes, de modo que sólo necesitamos dos de ellas; naturalmente, las más sencillas. Cumplen esta condición las

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{d^2 z_4}{d\tau^2} + \frac{d(\log\gamma)}{dr}\frac{dr}{d\tau}\frac{dz_4}{d\tau} = 0,$$



que por integración dan

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\theta}{d\tau}&=\frac{h}{r^2}\\ \frac{dz_4}{d\tau}&=\frac{a}{\gamma}\end{aligned}\right\};\qquad (61,2)$$

la primera expresión da la ley de las áreas y la segunda relaciona los intervalos de tiempo propio en el planeta y para el observador supuesto en el Sol, origen de coordenadas. a es una constante de integración.

Estas dos ecuaciones permiten eliminar $d\tau$ y dz_4 de la (61, 1), con lo cual toma la forma

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2=\frac{a-1}{h^2}+\frac{\alpha}{h^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\alpha\left(\frac{1}{r}\right)^3,$$

que derivada respecto de θ para eliminar a, e introduciendo el valor de α, conduce a

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}+\frac{1}{r}=\frac{k}{4\pi}\frac{m_1}{h^2}+\frac{3k}{4\pi}\frac{m_1}{r^2}. \qquad (61,3)$$

Esta ecuación diferencial corresponde a la trayectoria del planeta, y únicamente difiere de la (35, 2) en el último término, en cuya circunstancia recuerda a las correspondientes a los movimientos perturbados. Además, la relación de dicho término al anterior es $3\frac{h^2}{r^2}=3\left(r\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2$ en atención a (61, 2), o sea tres veces el cuadrado de la relación de la



velocidad normal al radio del planeta a la de propagación de la luz, cantidad fácil de calcular y que para Mercurio resulta ser, aproximadamente, $2{,}3 \times 10^{-7}$. Esto autoriza a aplicar un método de aproximaciones sucesivas a la resolución de (61, 3) que conduce directamente a

$$\frac{1}{r} = \frac{km_1}{4\pi h^2} \{1 + e \cos [(\theta - \bar{\omega}_0)(1 - \delta\bar{\omega})]\}, \quad (61,4)$$

solución que, como era lógico, sólo difiere de la (35, 3) en el factor adicional $1 - \delta\bar{\omega}$ para el arco. Notoriamente representa un deslizamiento angular de la órbita en su mismo plano y en el propio sentido del movimiento planetario, de suerte que la longitud del perihelio irá variando en la referida cantidad $\delta\bar{\omega}$, por lo cual la constante de integración $\bar{\omega}_0$ se ha de referir a dicha longitud en un tiempo definido. La expresión de $\delta\bar{\omega}$ en función de las constantes de la órbita es

$$\delta\bar{\omega} = \frac{12\pi^2\alpha^2}{Z_4^2 (1 - e^2)} \quad (61,5)$$

designando por Z_4 la duración de una revolución en unidades $\frac{1}{c}$ de segundo. Para Mercurio su valor numérico es $2{,}2803 \times 10^{17}$, y como

$$a = 5{,}787 \times 10^{12} \text{ cm. y } e = 0{,}2056,$$



se obtiene $\delta\bar{\omega} = 7{,}965 \times 10^{-8}$. Por consiguiente, para una revolución completa, el corrimiento del perihelio será $2\pi \times 7{,}965 \times 10^{-8} = 5{,}003 \times 10^{-7}$ o expresado en segundos de arco 0″1032. Como la relación entre las revoluciones de la Tierra y Mercurio es 4,152, aquel corrimiento por siglo se eleva a 42″9, cuya concordancia con el efecto residual inexplicado por la teoría de Newton (§ 17) es verdaderamente notable si se adopta el cómputo de Newcomb (41″2); pero aun aceptando el más reciente de Grossmann (38″), puede considerarse plenamente satisfactorio.

Es imposible buscar aquí la explicación del movimiento del nodo de Venus, que corresponde a un cambio de posición del plano de la órbita, ni tampoco la variación de la excentricidad de Mercurio. En cuanto al cambio de longitud del perihelio de Marte, sustituyendo en (61, 5) los elementos de este planeta, se encuentra para la variación secular 1″35, inferior al residuo (8″) que deja la teoría clásica, si bien en el sentido conveniente. Sería interesante repetir el cómputo de este residuo por si en los cálculos de Newcomb existiesen errores que modificaran su valor numérico en el mismo sentido señalado para Mercurio, con lo cual mejoraría la concordancia. Sin duda (61, 5), da igual fenómeno para la Tierra y Venus (3″8 y 8″6); pero la excentricidad mucho menor de sus órbitas deja estos efectos fue-



ra del alcance de los datos actuales de observación.

62. La pesantez de la energía, que ya vimos (§ 44) impone el postulado de identidad de las masas de inercia y gravitatoria, lleva a reconsiderar aquí el paso de un rayo luminoso por el campo gravitatorio solar a la manera del movimiento de una serie de partículas materiales ensartadas en el rayo de luz, según ya vimos en el § 44.

La ecuación (61, 3) toma en este caso la forma más sencilla

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{3km}{4\pi r^2}, \qquad (62, 1)$$

en atención a que para la velocidad de la luz $d\tau = 0$, de donde la constante de las áreas

$$h = r^2 \frac{d\theta}{d\tau}$$

ha de ser $h = \infty$ (1). De modo igual que en el caso

(1) Es interesante llamar aquí la atención sobre una circunstancia que acaso no pase desapercibida para el lector. La condición $h = \infty$ procede del primer postulado del principio restringido de relatividad, que asigna a la velocidad de la luz c el carácter de velocidad máxima. Parece, pues, que fundándose el razonamiento (§ 44) en cuya virtud supusimos que la luz es pesada, en un corolario de aquel principio, debió también ser esta condición base de la deducción del ángulo que el rayo se ha de desviar a su paso por las proximidades del



del movimiento planetario, el segundo miembro actúa como una fuerza perturbatriz, de suerte que el movimiento no perturbado, para el cual dicho segundo miembro es nulo, tendría por trayectoria

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\cos(\theta - \bar{\omega}) = \frac{1}{R}\operatorname{sen}\varphi,$$

si R es la mínima distancia desde el centro del Sol al rayo de luz y φ el complemento de $\theta - \bar{\omega}$. Llevando esta solución a (62, 1) se deduce en segunda aproximación

$$\frac{1}{r} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{R} + \frac{km}{R^2}(\operatorname{sen}^2\varphi + 2\cos^2\varphi),$$

que representa una curva hiperbólica, cuyas asíntotas se confunden con las direcciones inicial y final del rayo. Para obtener la ecuación de dichas asíntotas basta hacer $r = \infty$, y teniendo presente la pe-

Sol. Pero si así lo hubiese hecho, habría obtenido para ecuación de la trayectoria $R = r\cos(\theta - \bar{\omega})$, cuya significación es que la luz no se debe desviar, sino que el rayo es el normal al radio vector del punto más próximo al centro del Sol. Parece de aquí desprenderse que el valor entonces hallado para la desviación 0"87, que es idéntico al encontrado por Einstein, no debe ser compatible con el referido principio, pues en la deducción aludida se ha razonado suponiendo que el límite de las velocidades posibles es ∞ y no c.



queñez de φ, se puede reemplazar el seno por el arco y el coseno por la unidad, lo cual equivale a despreciar φ^2. Entonces la desviación (fig. 21) resultará

$$\psi = \frac{4km}{4\pi R^2},$$

que es justo el doble de lo obtenido en el § 44; esto es, 1″75.

He aquí un fenómeno cuya previsión escapa también a la ciencia clásica, pero que además no había sido denunciado por la observación en la época en que Einstein lo dedujo. Además, parece permitir criterios escalonados para separar los efectos que puedan proceder de los principios generales de dicha ciencia y de la hipótesis de Newton, referente a la gravedad. Se comprende el entusiasmo con que los astrónomos ingleses acudieron a la resolución de este problema durante el eclipse del 29 de mayo de 1919.

Sólo durante estos fenómenos cabe hoy por hoy la posibilidad de contrastar mediante la observación tales resultados teóricos, porque es únicamente del interior del cono de sombra arrojado por la Luna sobre nuestra atmósfera, desde donde se pueden percibir estrellas que se proyectan sobre la esfera celeste bastante cerca del limbo del Sol para que el valor de ψ sea apreciable. Sin la interposición de la pantalla lunar, la luz difundida por la atmósfera es



mucho más intensa que la que percibimos de las estrellas, haciendo imposible la visión. Pero, además, aquel eclipse ofrecía circunstancias excepcionales por la abundancia de estrellas brillantes en la región del cielo ocupada por el Sol en el mes de mayo. Por desgracia, esta feliz coyuntura ofrecida por la Naturaleza casi inmediatamente después de formularse la teoría fué contrapesada por las nefastas consecuencias de la guerra europea. Sólo los astrónomos ingleses contaron con medios, energías y entusiasmo para emprender este trabajo trascendental para la historia de la ciencia, y organizaron dos expediciones dirigidas: la una, por A. C. D. Crommelin, que se instaló en Sobral, al Norte del Brasil; la otra, por A. S. Eddington, el incansable propagandista de las ideas de Einstein, que se estableció en la isla Príncipe, del Golfo de Guinea.

Fueron los primeros más afortunados en sus observaciones por la perfección de las placas fotográficas obtenidas de la región del cielo en que se hallaba el Sol eclipsado; pero las de los segundos constituyen una plena confirmación de aquéllas, de valor tanto mayor cuanto que se referían a un lugar de condiciones bastante diversas de las características de la primera estación. Además, en Sobral, algún tiempo después, se fotografió con el mismo sistema óptico la región del cielo en que el Sol se proyectaba el 29 de mayo, cuando nuestro astro central es-



taba ya muy alejado de ella, y en Príncipe se obtuvieron inmediatamente fotografías de otras regiones celestes que, comparadas con otras obtenidas en Inglaterra, habrían de permitir el descubrimiento de cualquier modificación en los instrumentos por el viaje y la diferencia en las condiciones climatológicas.

Todas estas observaciones probaron que la des-

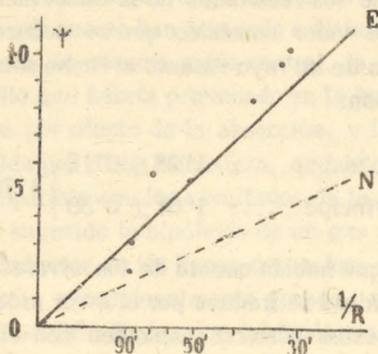


Fig. 26

viación de los rayos luminosos era un hecho innegable, y además también exacta la inversa proporcionalidad entre ella y la distancia al centro del Sol del lugar en que se proyecta la estrella, según se desprende de la figura 26, trazada con los datos obtenidos en Sobral. Del conjunto de estos hechos resulta confirmada una vez más la expresión para la masa

de la energía que deriva del principio de relatividad, así como también el postulado de equivalencia de Einstein. Pero no para ello aquí. En la misma figura están dibujadas las rectas que definen los valores de ϕ en función de $\frac{1}{R}$, según se acepte la teoría de Newton, ON, o la de Einstein, OE, y ya en ella es evidente la mayor precisión con que éste último traduce los resultados de la observación. Si se prefiere el valor numérico que se deduce para la desviación de un rayo rasante al limbo solar, los resultados son:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Sobral} \ldots\ldots\ldots & 1''98 \pm 0''12 \\ \text{Príncipe} \ldots\ldots & 1''61 \pm 0''30 \end{array}\right\} 1''79;$$

de modo que habida cuenta de los errores posibles, cuya magnitud se traduce por el error probable consignado, estos números coinciden con el previsto teóricamente.

63. Aquí, como en el caso del movimiento del perihelio de Mercurio, son muchos los que no aceptan los resultados de Crommelin y Eddington como una prueba incontestable de la teoría de Einstein. Se ha señalado el escaso peso que puede atribuirse a las observaciones de los astrónomos ingleses en atención al instrumental de que pudieron disponer dada la pequeñez de la desviación, pues en las pla-



cas fotográficas a un segundo de arco correspondían unas siete milésimas de milímetro. Se ha pensado en un efecto de refracción producido por una posible atmósfera gaseosa solar, y en atención a que la densidad que habría de serle atribuída excede grandemente los límites permitidos por otros fenómenos (como la presión que dichos gases ejercerían en la capa donde se produce el espectro solar de absorción, la perturbación que engendraría en la marcha de los cometas que se han acercado a distancias bastante menores de nuestro astro central, la disminución de brillo que habría provocado en la imagen de las estrellas por efecto de la absorción, y la propia luz difundida por dicha atmósfera, que le daría un brillo incompatible con los resultados de la observación) se ha sugerido la hipótesis de un gas especial, acaso el productor de las líneas coronales, cuya refracción fuese excepcionalmente grande, sin parar mientes en las dificultades que tal hipótesis, unida a una absorción y difusión despreciables, tiene para las teorías de estos fenómenos, plenamente confirmadas en el terreno experimental. También se ha traído a cuento la llamada refracción anual, descubierta recientemente por Couvoisier, no porque se le pueda atribuir el fenómeno discutido, sino como ejemplo de las causas posibles de él, independientes de la teoría de Einstein.

Dejando a un lado la refutación de cada una de



estas hipótesis particulares con que se quiere reemplazar la teoría del físico alemán, he de señalar simplemente su carácter específico para la sola interpretación de este fenómeno, sin que encuentren apoyo en ninguno otro, y menos parentesco ostensible con las interpretaciones, también *ad hoc*, a que me refería en el caso del movimiento del perihelio de Mercurio y el corrimiento de las rayas espectrales. Precisamente en la unidad que la teoría einsteiniana forma con los dos primeros hechos, aparentemente tan dispares, se halla su más fuerte sostén. Ellos son dos consecuencias que de la teoría surgen, sin que en ningún momento de su desarrollo hayan servido de faro que guiase los razonamientos de su autor, ni tampoco sirviesen para dar valor a constantes que en los cálculos se hubiesen conservado indeterminadas. De esta circunstancia procede el que la conformidad entre la observación y las predicciones teóricas sean argumentos decisivos en pro de las ideas de Einstein.

Esto no es negar la posibilidad, y aun la probabilidad, de que en fenómenos tan complejos como el paso de la luz por las vecindades del disco solar y a través de la región de nuestra atmósfera perturbada por el paso del cono de sombra lunar, no intervengan acciones que influyan sobre el resultado perceptible, aunque sólo como términos correctivos. Es de notar a este propósito que L. A. Bauer ha seña-



lado la existencia de una marcha sistemática en la distribución de los errores cuando se calcula la desviación correspondiente al borde solar partiendo de las diferentes estrellas observadas en Sobral, tomando en consideración su proximidad al eje o el plano del ecuador de nuestro astro central. Tal efecto, que parece real, resulta sin duda alguna del juego de un agente modificador del fenómeno, que no altera lo esencial del mismo.

Por otra parte, ¿cuál es el fundamento lógico de todas las resistencias ofrecidas contra la teoría de Einstein? ¿Es que ella supone la más ligera conmoción de cuanto se ha construído por la ciencia clásica en el terreno positivo? Evidentemente no, pues hemos visto repetidamente que, dentro de la aproximación requerida por las observaciones y experiencias que trataba de explicar, se confunden ambas. Precisamente falla la ciencia clásica cuando necesita forzar sus métodos, bien por la acumulación de efectos pequeños, que es el caso de Mercurio, bien por la intervención de velocidades grandes, como en la propagación de la luz. En cambio, según se ha visto, la teoría de Einstein continúa suministrando resultados conformes con la observación.

De aquí resulta con plena evidencia que aquellos recelos mentales con que se miran las nuevas ideas nacen por una extrapolación inaceptable de la hipó-

17



tesis de Newton. Habituados a su eficacia para la interpretación de la mayoría de los fenómenos complejos que la observación astronómica descubre, reducidos por la sencillez formal de la ley $\frac{kmm'}{r^2}$, nos hemos acostumbrado a otorgarle el valor de una imposición de la Naturaleza. Mejor que de una cuestión científica, se trata de un problema psicológico. Se ha dicho muchas veces que si Faraday no se hubiese encontrado tan ayuno de preparación matemática adecuada para conocer en toda su magnificencia la construcción teórica cimentada en la hipótesis de acciones electromagnéticas a distancia, cuyas leyes elementales fueron calcadas en la ley de Newton, no habría sembrado la semilla de la teoría que luego desarrolló su discípulo Maxwell, y que terminó por barrer completamente las ideas que parecían inconmovibles de Poinson y Gauss. Quizá, gracias a esta derrota del ídolo en el campo de los fenómenos físicos, hoy ofrecen menos resistencia a las nuevas ideas los espíritus dedicados al cultivo de esta ciencia que los astrónomos, en cuyo propio dominio es este el primer intento serio hecho en el sentido de relegar a un simple instrumento de cálculo la repetida ley de Newton.

Llevada la cuestión a este terreno, es indudable que la mayor complejidad de la teoría de Einstein



está sobradamente compensada por la eliminación de las acciones a distancia que han permanecido siempre incomprensibles para cuantos no hayan embotado el sentimiento filosófico por un culto excesivo del formulismo matemático.



CAPÍTULO VII

El Universo, la materia y la electricidad

64. Resumen del capítulo precedente.—65. Ecuaciones generales de campo gravitatorio en el seno de la materia.—66. Principio de la mínima acción aplicado al campo gravitatorio.—67. Influencia de este campo en los fenómenos electromagnéticos. —68. Forma definitiva de las ecuaciones del campo: curvatura total del Universo según Einstein.—69. Dimensiones del espacio.—70. El problema de la finitud del espacio.—71. El Universo de Sitter.—72. Extensión del intervalo fundamental: hipótesis de su invariancia en la teoría de Einstein.—73. El aforo del Universo según Weyl.—74. Sistema de aforo y electricidad.—75. Consecuencias que se derivan de la teoría de Weyl para la Filosofía natural.—76. El éter.

64. Conviene a la clara percepción del contenido de este capítulo que comience resumiendo lo dicho en el anterior, pues las predicciones de la teoría de Einstein, en él tratadas, se mantienen al alcance de la observación y la experiencia hoy posibles, y a su confirmación tenemos que atenernos



para otorgar nuestro asentimiento a otros corolarios más especulativos, siquiera de trascendencia filosófica superior, y aun a extensiones que las ideas de Einstein han tenido en manos de otros hombres de ciencia, y particularmente de Weyl. Los unos y las otras son el objeto de este capítulo.

El principio de equivalencia de un movimiento acelerado del sistema de referencia con un campo gravitatorio, es la clave de toda la teoría de Einstein. El cambio de ejes sin limitación obliga a reemplazar la expresión sencilla del intervalo (50, 1) por la más compleja (50, 3), y el referido principio da a los coeficientes g_{ik} de esta última un sentido físico, considerándoles característicos del campo. Digo característicos, pero sin querer significar que a cada campo corresponda un sistema definido y único de tales coeficientes. El principio de relatividad consiste esencialmente en la incapacidad para reconocer el verdadero campo gravitatorio, separándolo de todo vestigio de movimiento arbitrario en el sistema de referencia. Por consiguiente, son posibles diferentes modos de coordinar los sucesos que en el Universo se desarrollan; esto es, podemos a nuestro capricho elegir el sistema de coordenadas z_1, z_2, z_3, z_4, con la misma libertad que sobre una superficie es posible fijar la posición de sus puntos mediante sistemas de líneas dibujados en ella. Con la misma libertad, y no con más. La naturaleza de la superficie en este caso,



y la existencia real del campo gravitatorio en el otro, ponen trabas a nuestro capricho, puesto que los coeficientes del intervalo elemental *ds* han de satisfacer a las condiciones de curvatura, que para el campo gravitatorio vimos están expresadas por las diez ecuaciones de derivadas parciales

$$G_{ik} = 0, \qquad (64, 1)$$

entre las cuales existen cuatro relaciones que las hacen equivaler a sólo seis independientes.

También existen razones de diferente orden que llevan a dar preferencia a determinados sistemas de coordenadas. Tal es el conservar separados el espacio y el tiempo, adoptando para el intervalo la forma

$$ds^2 = \sum_{1,2,3} \gamma_{ik} dz_i dz_k - f^2 dz_4, \qquad (64, 2)$$

o elegir aquellos para los cuales el determinante g sea constantemente igual a -1.

Esta libertad conviene frecuentemente utilizarla para que en un dominio elemental del Universo, esto es, en un lugar definido del espacio y en un instante determinado, se pueda reducir el intervaló elemental a la forma clásica en la relatividad restringida

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 - dz_4^2,$$

aunque fuera de dicho dominio vuelve a adoptar la forma general. Con un leguaje más físico puede de-



cirse que es posible en un lugar y un instante determinado anular la gravitación (por ejemplo, cuando el laboratorio cae libremente en el espacio); pero si extendemos el conocimiento del Universo desde este dominio al exterior, no es posible prescindir de los efectos correspondientes a ella. Dicho conocimiento supone realizar medidas de longitud y tiempo, y las reglas y relojes que para tal fin son empleados sufren los cambios aparentes de dimensiones a que tantan veces se ha aludido y que impiden la aplicación de la geometría de Euclides.

En todo esto la analogía con la teoría de las superficies en la forma en que podría ser formulada por un homoide que en ella habite sigue siendo estrecha. En una región muy pequeña cabe identificarla con su plano tangente, aplicando a sus relaciones métricas aquella geometría; pero en cuanto se extiende el dominio estudiado, es necesario atenerse a las condiciones impuestas por la curvatura que corresponde a las ecuaciones (64, 1). La posibilidad de este estudio en la forma establecida por Riemann, descansa en la invariancia del intervalo ds, que, traducida al lenguaje vulgar, equivale a afirmar que la reglilla que se utiliza por el homoide para sus medidas se conserva idéntica a sí misma, sea cual fuere el lugar que ocupe y el camino por el cual se la ha llevado hasta él. Bien entendido, la identidad aludida se refiere sólo a su extensión o longitud, pues por virtud



de la curvatura del Universo, si suponemos que una misma reglilla se transporta paralelamente a sí misma desde un punto A a otro B, siguiendo dos caminos diferentes, las dos respectivas posiciones finales en B formarán un ángulo finito.

En aquella hipótesis de la invariancia de ds se apoya la deducción de las ecuaciones del movimiento de un punto material, libre de toda acción externa. Tal movimiento sólo es rectilíneo y uniforme, como requiere el postulado de la Mecánica clásica, cuando el espacio es euclidiano; esto es, en el supuesto de que no exista campo gravitatorio. Caso contrario, el espacio es curvo y la trayectoria del punto libre será una línea geodésica, como nos enseña la Dinámica ocurre para un punto obligado a permanecer en una superficie. Esta geodésica del espacio es la proyección en él de la hodócrona del Universo que expresa su ley de movimiento, que también es una geodésica.

Cuando en las ecuaciones generales así obtenidas (56, 2) nos limitamos a una primera aproximación, despreciando términos que generalmente escapan al alcance de nuestra percepción, resultan idénticas a las deducidas por la Mecánica para el caso en que exista un campo newtoniano. Paralelamente las ecuaciones (64, 1) degeneran en la de Laplace

$$\Delta V = 0,$$



característica de dicho campo. Pero si avanzamos más la aproximación concretándonos al caso sencillo de una masa atractiva única, se obtienen para los puntos de velocidad pequeña órbitas casi cerradas y prácticamente idénticas a las elipses planetarias, supuestas girando en su propio plano con velocidad angular determinada. Este giro coincide exactamente con el efecto residual que la teoría de Newton es incapaz de explicar para Mercurio. Cuando la velocidad del punto es grande, la trayectoria es una hipérbola, conforme también con aquella teoría; pero el ángulo de las asíntotas es menor, como corresponde a un giro de la órbita, y a ello es debida la desviación de los rayos de luz que pasan próximos al Sol, comprobada en el eclipse de 29 de mayo de 1919.

La visión de esta maravillosa síntesis es bastante para borrar de la mente de cuantos la perciban toda inercia intelectual, originada por el apego a hipótesis que fueron rectoras de la educación científica de las últimas generaciones, y permiten penetrar con mayor confianza en otros aspectos de la teoría de Einstein.

Pero antes conviene que insista un momento sobre la naturaleza de la *explicación* que ella da de la gravitación, para poner de relieve que no se trata de una reducción de las fuerzas de Newton a otras formas de energía, que era la tendencia constante en todos los intentos que se han producido de Newton



acá, y que someramente recogí en el cap. V. La teoría de Einstein interpreta todas las particularidades de los movimientos de los cuerpos celestes por la curvatura que en el espacio producen la materia y la energía. Así la gravitación es una condición impuesta a los movimientos por la naturaleza del espacio, no una fuerza o agente activo que intervenga en ellos, y precisamente aquí está la razón de aquellos fracasos a que aludía. Quizá algún lector se sienta inclinado a preguntar: ¿por qué la materia produce la curvatura del espacio? Pero esto es una cuestión que trasciende de la ciencia actual, si es que no nos conformamos con atribuir a la curvatura en cuestión el carácter de verdadera esencia de la materia, conforme con el punto de vista de Eddington.

65. Dando por plenamente justificado que las ecuaciones

$$G_{ik} = 0$$

expresan las condiciones que han de ser satisfechas por las g_{ik} en presencia de una masa puntual única, y aun cuando se trate de una distribución discreta de materia, se ofrece inmediatamente el problema de extender dichas ecuaciones al caso de una distribución continua sobre un volumen finito, para un punto inferior a él.

La ciencia clásica procedió para la resolución del mismo problema en una forma que a grandes rasgos



podemos describir en estos términos. Puesto que el potencial gravitatorio V es una cantidad escalar, cuando en vez de una masa puntual única existe un conjunto distribuído discretamente en el espacio, dicha función se obtiene por simple suma de los potenciales correspondientes a cada una,

$$V = \sum \frac{km}{4\pi r}.$$

Imaginemos ahora que el número de masas puntuales crece, acortándose sus distancias hasta rebasar el poder separador de nuestros métodos de observación. La anterior expresión de V sigue siendo rigorosamente exacta, pero inaplicable, tanto en atención al escaso poder separador a que aludía, como en virtud de la limitación de nuestra capacidad intelectual. La dificultad la salva la Física matemática por un paso al límite que conduce a reemplazar la ecuación de Laplace por la

$$\Delta V = -k\rho_o, \qquad (65, 1)$$

que lleva el nombre de Poison. En ella ρ_0 es la densidad de la materia supuesta en reposo.

Para seguir el mismo método en la teoría de Einstein se tropieza con que los potenciales gravitatorios g_{ij} constituyen aquí las componentes de un tensor, que además no entran linealmente en las G_{ij}. Por consiguiente, ajustándose al rigor analítico más



estricto, es imposible proceder ahora del modo que hemos recordado; pero nada impide que se tome (65, 1) como guía, buscando un grupo de ecuaciones que con ella se confunda en primera aproximación.

Es notorio que los primeros miembros han de ser los mismos que simbólicamente se designan por G_{ij}. En los segundos deben figurar las componentes de un tensor que degenere en $k\rho_0$ para la aproximación que convierta las G_{ij} en ΔV. Cumplen con esta condición las siguientes 10 magnitudes que esquemáticamente se representan por T^{ij}: 1.°, las seis componentes de las presiones y tensiones que pudiéramos llamar elásticas y se ejercen en el seno de la materia; 2.°, las tres cantidades de movimiento para la unidad de volumen que la ciencia clásica expresa mediante el producto de la densidad de materia por las velocidades locales paralelamente a los ejes coordenados, y 3.°, la densidad de energía, o también de masa, puesto que el principio restringido identifica ambas magnitudes. Cuando no existen movimientos en el seno de la materia, que es el caso en que las G_{ij} se reducen a ΔV, las nueve primeras componentes T_{ij} se anulan y sólo queda $T_{44} = \rho_0$, de modo que siguiendo la analogía señalada, parece suficiente escribir

$$G_{ij} = kT_{ij}. \qquad (65, 2)$$

Pero tratándose de una ley natural, el principio de



relatividad exige el cumplimiento de ciertas condiciones de invariancia que no llenan las ecuaciones (65, 2). Por ello Einstein introduce en su lugar las

$$G_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} G = - k T_{ij}, \qquad (65, 3)$$

donde G es una magnitud escalar definida por

$$G = \sum_{ij} g^{ij} G_{ij}. \qquad (65, 4)$$

Lo mismo en (65, 2) que en (65, 3), los primeros miembros de las 10 ecuaciones representadas simbólicamente por cada una de aquéllas, siguen ligados por las cuatro relaciones a que varias veces me he referido. Dicho se está que esto impone cuatro relaciones equivalentes entre las 10 componentes del tensor T_{ij}, cuya naturaleza, puramente mecánica, resulta claramente de la enumeración de las componentes que hice arriba. Precisamente estas cuatro relaciones son la expresión de los llamados teoremas de conservación en la Mecánica clásica. El de la conservación de la energía, que afirma la igualdad del incremento de energía al trabajo de las fuerzas; y el teorema de la conservación de la cantidad de movimiento, traducido por la igualdad de las variaciones de las tres componentes de dicha cantidad a las fuerzas que proceden de las presiones y tensiones elásticas.



Esta obtención de los teoremas recordados como una consecuencia de las ecuaciones (65, 2) y (65, 3), viene a justificar la forma de las leyes generales del campo gravitatorio, cuando se consideran los referidos teoremas de la Mecánica clásica como principios fundamentales de la Filosofía natural; o, recíprocamente, si aquellas ecuaciones se juzgan establecidas con plena garantía, constituyen base suficiente para edificar la nueva ciencia.

66. El método arriba bosquejado para deducir las ecuaciones generales del campo gravitorio (65, 3), es el camino por el cual llegó Einstein a su descubrimiento. Pero una vez encontradas, es posible ordenar nuestros conocimientos con mayor rigor lógico, concentrando en un postulado inicial todas las hipótesis que se hallan distribuídas en el curso de los razonamientos anteriores. No añade esto un adarme a la *verdad* de la teoría, pero aumenta considerablemente su *belleza*.

El caso no es nuevo. Ya dije (§§ 5 y 24) que la Dinámica puede deducirse del principio de Hamilton, más conocido en Física con el nombre de *principio de la mínima acción,*

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{H}dt = 0, \qquad (66, 1)$$

donde H es una función explícita de los parámetros q_i que definen el sistema *(coordenadas generalizadas)* y de sus derivadas respecto al tiempo. La integral se denomina *acción* entre t_0 y t_1. Este principio significa que el tránsito espontáneo del sistema mecánico considerado libre de acciones exteriores de uno a otro de los



estados correspondientes a los valores t_0 y t_1 de t, se produce de modo que la acción no cambie de valor numérico si se altera infinitamente poco el proceso evolutivo entre ellos: es, pues, una magnitud estacionaria. En su virtud, sencillas transformaciones de cálculo llevan a escribir (66, 1) en la forma

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_i Q_i \delta q_i \right) dt = 0,$$

y como los δq_i tienen valores arbitrarios, deberá verificarse

$$Q_i = 0,$$

que son las i ecuaciones dinámicas del sistema; una por cada parámetro q_i.

He de recordar que este principio se convierte en un teorema cuando se desarrolla la Mecánica partiendo de los postulados clásicos o de los propios de la relatividad restringida, siendo H, para los sistemas más interesantes, la diferencia de las energías cinética y potencial. Por el contrario, cuando se adopta (66, 1) como ley fundamental, conviene dejar a dicha función una completa libertad de forma, pues el propio principio de la conservación de la energía es corolario suyo.

No son las ecuaciones de la Dinámica las únicas leyes naturales que se obtienen admitiendo la existencia de (66, 1). En diversos capítulos de la Física, y muy particularmente en la teoría de los fenómenos electromagnéticos (Larmor y Schwarzschild), se llega por este camino a deducir con elegancia insuperable sus leyes fundamentales (pág. 56). En estos casos, dicho se está que H contiene otras variables que las geométricas y el tiempo, cuyos incrementos arbitrarios definen la mo-



dificación del estado físico que deja estacionaria la acción; para la Electrodinámica estas variables pueden ser los potenciales P_i. El problema está reducido en cada caso concreto a encontrar la función de Hamilton apropiada.

Lorentz y Hilbert, los primeros, e inmediatamente el propio Einstein, lograron una aplicación adecuada de este método a la teoría de la gravitación, empleando como función de Hamilton la curvatura G. En efecto: dicha magnitud, definida en (65, 4), es una propiedad intrínseca del Universo, y por tanto, un invariante para cualquier cambio del sistema de referencia. Como también lo es

$$\sqrt{-g}\, dz_1 dz_2 dz_3 dz_4 = \sqrt{-g}\, dZ,$$

en virtud de un teorema conocido de la teoría general del cambio de variables, evidentemente cumplirá la misma condición el producto de ambas magnitudes, así como su integral sobre un dominio finito y determinado D,

$$\int_D \sqrt{-g}\, G dZ = \int_D \mathcal{G} dZ. \qquad (66, 2)$$

Pero esta invariancia se expresa mediante

$$\delta \int_D \mathcal{G} dZ = 0, \qquad (66, 3)$$

donde el símbolo δ afecta a las g^{ik} y sus derivadas respecto de las z_i, que son las variables de quienes depende G, y cuyos valores caracterizan al sistema de coordenadas. Aquí dZ corresponde a dt en (66, 1), como el dominio D al intervalo $t_1 - t_0$, de suerte que en sus fronteras se anulan las variaciones representadas por el símbolo δ. La misma transformación analítica que en-



tonces llevará, por consiguiente, a escribir en vez de (66, 3)

$$\int_D \left(\sum_{ij} \mathcal{G}_{ij} \delta g^{ij} \right) dZ = 0,$$

y los coeficientes de las δg^{ij} son las ecuaciones del campo gravitatorio (65, 3).

67. Acabo de decir que el principio de la mínima acción ha sido aplicado para deducir las ecuaciones del campo electromagnético. Añadiré ahora que es el método adecuado para obtenerlas en su forma más general, aplicable a cualquier sistema de referencia, en cuya forma va contenida la solución de un problema físico trascendental. Me refiero a la influencia, tantas veces buscada sin éxito, de la gravedad sobre los fenómenos eléctricos y magnéticos de todo género, e inversamente. Ya hice notar (§ 49) que gracias al principio de equivalencia puede llegarse al descubrimiento de las influencias en cuestión, determinando los cambios que en las ecuaciones aludidas produce la aceleración del sistema de referencia, o dicho de otro modo, como figuran en ella los potenciales gravitatorios g_{ik}.

No cabe en los límites de este libro seguir los razonamientos que conducen a dichas ecuaciones. Como siempre, todo el problema estriba en buscar la función de Hamilton, pero aquí no es dificultad grave, puesto que ha sido ya resuelto en la ciencia clásica; por cierto, conservando para dicha función la forma de diferencia de dos términos, que pueden considerarse equivalentes a las energías cinética y potencial de la Mecánica. Los parámetros, arbitrariamente incrementables, son los potenciales P_i, relacionados con las componentes del



campo por las ecuaciones (10, 5) y (10, 11), de las cuales derivan las de ligadura (10, 12),

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial h_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial h_{ki}}{\partial x_j}=0.$$

Nótese que este primer grupo de ecuaciones, por corresponder a la definición de los campos, no se altera al pasar a la ciencia del principio de relatividad general.

El segundo grupo, que es el deducido mediante el principio de mínima acción, adopta la forma

$$\mathscr{C}^i=-\sum_k \frac{\partial \mathfrak{h}^{ik}}{\partial x^k},$$

en la cual

$$\mathscr{C}^i=\sqrt{-g}\,C^i, \qquad \mathfrak{h}^{ik}=\sqrt{-g}\,h^{ik}$$
$$C^i=\sum_k g^{ik}C_k \qquad h^{ik}=\sum_{rs} g^{ir}g^{ks}h_{rs}.$$

Quizá no esté de más justificar estas ecuaciones haciendo notar que se reducen a las (10, 14) cuando se da a las g_{ik} los valores (56, 3). En efecto; en primer término, $\sqrt{-g}=1$, con lo cual las $\mathscr{C}^i$ y $\mathfrak{h}^{ik}$ se confunden con las C_i y h^{ik}. En segundo lugar, cada una de estas últimas toma los valores

$$C^4=C_4, \quad C^i=-C_i \quad (i=1, 2, 3)$$
$$h^{ik}=\pm h_{ik};$$

en la tercera ecuacion el signo — corresponde al caso en que sólo uno de los índices i, k sea 4, y el — a los restantes. Así, por ejemplo,

$$C_1=-\frac{\partial h_{14}}{\partial x_4}+\frac{\partial h_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial h_{12}}{\partial x_2},$$



y análogamente para las otras componentes. Ahora bien: reemplazando las h_{ik} por sus valores (10, 5) y (10, 11), y teniendo en cuenta la (10, 15), se vuelve a la

$$C_i = -\Box P_i.$$

Ya he llamado la atención sobre la pequeñísima diferencia entre los valores de las g_{ik} que corresponden a nuestro campo gravitatorio y los (56, 3), y ello da cumplida explicación de cómo la experiencia ha sido hasta hoy incapaz de descubrir la influencia de la gravedad en los fenómenos electromagnéticos.

68. Las ecuaciones de la forma (65, 3) para el campo gravitatorio no son las únicas que satisfacen a las condiciones recordadas en el § 65. El propio Einstein adoptó la forma más general

$$G_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij}\left(G - \frac{1}{2} G_0\right) = -kT_{ij}, \quad (68, 1)$$

donde G_0 es una constante positiva, y cuya diferencia esencial con (65, 3) y toda la teoría que precede estriba en la naturaleza del espacio fuera de los lugares ocupados por la materia; es decir, donde todas las T_{ij} se anulan. En ella, para las regiones en cuestión, todas las componentes del tensor G_{ij} son nulas, y por tanto, también la propia curvatura; para el nuevo punto de vista, si se multiplica cada (68, 1) por su g^{ij} correspondiente y se suman los resultados, en virtud de (65, 4) y de la propia signi-



ficación de estos factores, así como habida cuenta de la teoría de determinantes, que conduce a

$$\sum_{ij} g^{ij} g_{ij} = 4,$$

se obtiene

$$G = G_o \quad y \quad G_{ij} = g_{ij} \frac{G_o}{4}. \qquad (68,2)$$

Esta ecuación tiene una significación física interesante. Cuando se da a las ecuaciones del campo la forma (65, 3), puesto que fuera de la materia $G = 0$, se puede elegir la forma de las g_{ij} de modo que a distancia infinitamente grande tengan los valores (56, 3), que corresponden a un Universo plano, o euclídeo; la curvatura que la materia determina en él puede compararse con la que producen las partículas flotantes en la superficie libre de un líquido (§ 58). El caso es otro para las (68, 1), pues siendo $G \neq 0$, aunque no exista materia, dicho se está que en el infinito el Universo no puede ser plano, ni las g_{ij} han de tender a los valores (56, 3).

Conviene salir al paso de una objeción que el lector puede formular a poco que medite sobre el punto de vista que ahora desarrollamos, comparándole con las aplicaciones de la teoría de Einstein hechas en el capítulo precedente para explicar el corrimiento del perihelio de Mercurio y la desviación de los rayos luminosos. Los valores de g_{ij} que entonces se



utilizaron fueron expresamente elegidos de modo que en el infinito se cumpliese la condición (56, 3), que acabo de afirmar es esencialmente inaceptable. Pero la contradicción se desvanece siempre que G_0 tenga un valor bastante pequeño, para que dentro de los límites de los errores de observación se puedan despreciar los segundos miembros de (68, 2), condición que veremos en seguida debe cumplirse.

Para seguir adelante en este camino conviene volver a la forma de $d\tau^2$ correspondiente a (50, 5), en la cual se encuentran separados el espacio y el tiempo, de modo que las g_{i4} son todas nulas, así como las g^{i4}. Además, nos atendremos a la aproximación que puede suministrar la hipótesis de una distribución uniforme en el espacio de toda la materia que integra la Naturaleza, suponiendo, además, que las velocidades de los puntos en movimiento son prácticamente nulas; hipótesis conforme con la observación, ya que la unidad en que dichas velocidades se miden es $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm. sec^{-1}. Entonces las componentes del tensor T_{ij} son prácticamente nulas, con la sola excepción de

$$T_{44} = k\rho.$$

Si la distribución aludida de la materia ha de ser también permanente, g_{44} debe tener un valor constante que nada impide se identifique con la unidad. En cuanto a los demás potenciales g_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$.



Einstein les atribuye los valores que corresponden a la generalización de la fórmula para el elemento de arco sobre la esfera, utilizando coordenadas polares,

$$d\tau^2 = -R^2 [d\chi^2 + \text{sen}^2\chi\,(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)] + dz_4^2.$$

Entonces, la realización de los cálculos indicados en (58, 2) conduce a

$$G_{ij} = \frac{2}{R^2} g_{ij} \quad \text{salvo para} \quad G_{44} = 0, \qquad (68,3)$$

y por (65, 4)

$$G = \frac{6}{R^2}. \qquad (68,4)$$

Según estas fórmulas, el Universo de Einstein tiene una curvatura nula en el sentido del eje de los tiempos, z_4, mientras según las restantes dimensiones, aquélla es constante y positiva. Se trata, pues, de un Universo cilíndrico de cuatro dimensiones, cuyas secciones rectas, que constituyen nuestro espacio, son superficies hiperesféricas de tres dimensiones: las hodócronas de los cuerpos que ocupan posiciones fijas son rectas que señalan un sentido definido a la evolución de los tiempos, mientras las trayectorias descritas por aquellos que se muevan libres de toda acción externa serán líneas cerradas en el espacio.

Pero sigamos en la evaluación de las característi-



cas de este Universo, para cuyo fin podemos utilizar una cualquiera de las ecuaciones (67, 1), en que $i = j = 1, 2$ ó 3 y la correspondiente a $i = j = 4$; o sean

$$G_{11} - \frac{1}{2} g_{11}\left(G - \frac{1}{2} G_o\right) = 0,$$

$$G_{44} - \frac{1}{2} g_{44}\left(G - \frac{1}{2} G_o\right) = - k\rho_o.$$

Sustituyendo los valores (68, 3) y (68, 4) se convierten en

$$-2 + \frac{R^2}{2}\left(\frac{6}{R^2} - \frac{1}{2} G_o\right) = 0 \quad \text{o} \quad G_o = \frac{4}{R^2}$$

$$-\frac{3}{R^2} + \frac{1}{R^2} = - k\rho_o \quad \text{o} \quad \frac{1}{R^2} = \frac{k\rho_o}{2}. \quad (68, 5)$$

La primera de las expresiones encontradas da el valor de la constante universal G_0 en función de R, que en virtud de (68, 4) podemos considerarle como radio de la hiperesfera que constituye nuestro espacio; mientras la segunda define este radio en función de la densidad uniforme de materia. Aquélla representa la curvatura del espacio en el vacío, y corresponde a una realidad física; ésta es sólo el promedio de los valores que dicha magnitud adopta como consecuencia de la distribución de la materia. Por ello parece conveniente reemplazar la ecuación (68, 5), que la define numéricamente, por otra en que figu-



re la masa total de materia distribuída en el espacio, a la cual se llega fácilmente en atención a que, por definición

$$\rho_0 = \frac{M_0}{2\pi^2 R^3},$$

donde el denominador es el área de la hiperesfera de cuatro dimensiones. Esta expresión llevada a (67,5) la convierte en

$$R = \frac{kM_0}{4\pi^2}, \qquad (68,6)$$

de suerte que el radio del espacio hiperesférico, en cuya superficie se supone distribuída toda la materia que en él está realmente contenida, se halla unívocamente determinado; o dicho de un modo que hace resaltar el gran interés filosófico de este resultado, la extensión del espacio es justamente la necesaria para contener la materia que en él existe, ni más ni menos grande, de suerte que un *espacio vacío,* receptáculo dispuesto para recibir la materia, es una expresión sin sentido.

Dicho se está que esta forma hiperesférica del espacio, que es consecuencia de la supuesta distribución uniforme de la materia, no tiene otro carácter que el de una burda imagen de la realidad. La observación denuncia, en vez de esta uniformidad, agrupaciones diversas en escala ascendente. Los



cuerpos que percibimos como perfectamente distintos: los astros, por ejemplo, se hallan integrados por una aglomeración de moléculas y átomos, a su vez sistemas complejos en equilibrio dinámico de electrones y protones (unidad de carga positiva que forma el núcleo del átomo de hidrógeno), hoy por hoy últimos elementos conocidos del mundo material. Del otro lado, los cuerpos celestes, con individualidad bien definida, engendran sistemas planetarios, los cuales a su vez se asocian constituyendo grupos superiores, que no han sido más fáciles de reconocer que la complejidad del edificio atómico. Si aquí se ha luchado con su pequeñez, la percepción de aquellas unidades tropieza con el inconveniente de sus enormes dimensiones y distancias mutuas, que las hacen aparecer como conjuntos inorgánicos (cual nuestro sistema galáctico), o sólo son denunciables en forma de nebulosas.

Notoriamente la hipótesis de la distribución uniforme es incompatible con esta estructura eminentemente granular; pero al prescindir de estos detalles en una visión de conjunto de nuestro mundo no cometemos más grave pecado que al identificar la superficie terrestre con la de una esfera o un elipsoide. Sólo prescindiendo de las particularidades topográficas se puede llegar a dicha concepción: un habitante de país quebrado, con imaginación bastante limitada para que no le sea dable rebasar las



montañas que encierran su paisaje, no se da clara cuenta de la esfericidad de la superficie terrestre.

Así, aquella imagen sencilla del mundo es perfectamente aceptable para llegar al conocimiento de algunos datos fundamentales referentes a él. Por este camino encontramos un valor para la constante G_0 en función del radio de curvatura R de nuestro mundo ficticio, el cual a su vez viene determinado (68, 6) por la masa total de materia M_0 distribuída en él. Por otra parte (68, 5) permite el cálculo de R partiendo de la densidad media ρ_0, magnitud quizá más fácil de estimar que M_0.

69. Si como ejemplo se parte de la densidad de estrellas en la región central de nuestro sistema galáctico, que Kapteyn estima ser una por cada 3×10^{56} centímetros cúbicos, y se supone que la masa de éstas es igual a la del Sol, 2×10^{33} gr., ρ_0 resulta por el cociente de ambos números igual a 7×10^{-24} gr. Entonces del valor de k, del § 36, y de (68, 5) se deduce

$$R = 7 \times 10^{25} \text{ cm.},$$

o sea unos cuatro billones de veces la distancia media del Sol a la Tierra. Digamos de paso que por otros caminos se llega a números de este orden de magnitud (1).

---

(1) Véase, por ejemplo, Sittes, *M. N.*, 78, pág. 24 y siguiente.



El volumen de nuestro espacio sería de 2×10^{76} centímetros cúbicos, y la masa material que contiene 10^{53} gr., o sea 5×10^{19} veces el Sol. Kapteyn estima la masa total de nuestro sistema galáctico; esto es, de las estrellas *visibles* que integran la vía láctea, en 6×10^{42} gr., lo cual supone que en el mundo ha de existir un número de dichos sistemas que se eleva, por lo menos, a 10^{10}, en la hipótesis de que sean todos de magnitud comparable. Cada uno de ellos dispondrá de un espacio cuyo volumen es 10^{66} cm.^{3}, de suerte que la distancia media entre cada dos es 10^{22} cm., que la luz recorrería en unos diez mil años. Todos estos números son colosales, pero no se hallan en contradicción con lo que hacen esperar las interpretaciones que los astrónomos dedicados al estudio de las nebulosas creen poder deducir de sus observaciones.

Dicho se está que las estimaciones precedentes tienen un valor relativo, puesto que proceden de haber admitido como densidad media, ρ_0, la *aparente* en la región central de la Vía láctea, significando con el adjetivo que sólo se toman en consideración para el cálculo las estrellas visibles. Es indudable que existe una cantidad respetable de materia que no emite luz, a la cual se ha acudido varias veces para explicar determinadas particularidades de la distribución estelar, como las lagunas obscuras de la Vía láctea.



Esta materia obscura tiene también interés para la cosmología que deriva de la teoría de Einstein. Si el espacio es una variedad cerrada, aproximadamente comparable con una hipersuperficie esférica, las ondas luminosas que parten de un astro deberán concentrarse en el punto diametralmente opuesto de la hiperesfera, dando lugar a una imagen real de aquél, que no parece fácil de distinguir del astro verdadero. Naturalmente estas imágenes corresponden a una época muy retrasada de la evolución del astro real, puesto que el tiempo invertido por la luz para llegar del primero al segundo se eleva a algunas decenas de millones de años, en la hipótesis del valor de R que sirve de base a todas estas estimaciones. Pero tales períodos, enormes cuando se toma para término de comparación la vida histórica de la humanidad, son bastante pequeños si nos atenemos a la evolución de una estrella, y no es presumible que pueda apreciarse diferencia notable en el estado físico revelado por la luz que del astro y su imagen procede. Así podría pensarse que, *groso modo*, un 50 por 100 de los cuerpos celestes son aparentes. Sin embargo, para que el astro imagen se forme es necesario que la luz no sea absorbida en su trayecto, hipótesis que no es probable corresponda a la realidad, si se admite la existencia de materia obscura distribuída en el espacio. Y no es necesario para ello acudir a cantidades difíciles de poner de acuerdo



con la observación. Shapley estima que el coeficiente de absorción del espacio intergaláctico es a lo más 3×10^{-24} por cm., de suerte que en el trayecto desde el astro a su imagen, $\pi a = 21 \times 10^{26}$, la magnitud estelar habrá disminuído 700 veces: mucho más de lo necesario para que tal duplicación de los cuerpos celestes no se produzca en la realidad.

70. Dejando a un lado la mayor o menor probabilidad que puede derivarse de estos números para la hipótesis del espacio cerrado, sí conviene notar que mediante ella se resuelve una dificultad que se ofreció a la Filosofía natural, y aun a la ciencia positiva, a la cual, en este último aspecto, hube de referirme precedentemente (§ 41). Dentro de la geometría euclidiana, considerada como expresión fiel de relaciones métricas, el espacio o es infinito o posee límites. El último término de la disyuntiva es completamente inaceptable, pues dichos límites serían una barrera que separaría el cosmos de la nada; y en cuanto al primero nos obliga a suponer la materia distribuída en su total extensión, con una densidad que en primera aproximación ha de ser constante, pues de otro modo caeríamos en una extensión vacía, tan inconcebible como la nada, de la cual no se distingue realmente. Pero entonces, el mundo regido por la ley de Newton no podría hallarse en equilibrio, sino que la expresada ley provocaría la condensación de la materia en una región finita trayendo



de nuevo a colación, de modo inevitable, la idea de espacio vacío.

En efecto: partamos de la supuesta distribución sensiblemente uniforme de la materia, y tracemos una serie de esferas de radio creciente alrededor de un punto cualquiera. Según la referida ley de Newton, la atracción ejercida por toda la materia interior a una de estas esferas es la misma que si toda ella se concentrara en el centro, de modo que para un punto situado en la superficie la atracción crecería como el cubo del radio, en razón de la masa $\frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0$ dentro de ella contenida, y disminuiría como el cuadrado de la misma magnitud en virtud de la propia ley de Newton, $\frac{k}{4\pi} \frac{m}{r^2}$. En definitiva, habría un aumento de fuerza proporcional a r, que sería la causa de la condensación de que antes hablaba.

Esta dificultad no escapó a la perspicacia de los hombres de ciencia anteriores a Einstein, sino que para eliminarla dije ya (§ 41) que Neumann y Seelizer introdujeron en la ley de la atracción universal términos exponenciales, que suponen una absorción de la energía gravitatoria. Dicho se está que la dificultad física desaparece así; pero es evidente el escaso valor de tal hipótesis, especialmente inventada, sobre todo cuando se la compara con la elimi-



nación completa de la dificultad que permite la concepción de Einstein.

Con el espacio cerrado su extensión deja de ser infinita, sin necesidad de suponerla dotada de límites, como ocurre en el caso de una superficie esférica o elíptica. Estos ejemplos son una excelente ayuda para la representación imaginativa de lo que puede ser el espacio de Einstein, pero hemos de librarnos muy bien de atribuirle mayor alcance. Esta curvatura de las superficies supone una variedad de tres dimensiones en que se hallen contenidas, en tanto que no podemos afirmar la realidad de otras dimensiones del espacio que las tres de que nos dan fe los sentidos. Manteniéndonos en terreno firme hemos de decir que la métrica del espacio no corresponde a la geometría de Euclides, sino a otra en la cual no se puede hablar de líneas infinitamente largas.

71. La interpretación del Universo que acabo de bosquejar se funda en dos hipótesis principales: la primera está contenida en la forma (68, 1) para las ecuaciones del campo gravitatorio, que conduce a una curvatura finita, G_0, para el vacío; la segunda corresponde a la expresión adoptada para $d\tau^2$, de la cual se deduce la relación (68, 6). Sitter ha propuesto en su lugar la

$$d\tau^2 = -R^2[d\chi^2 + \operatorname{sen}^2\chi\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2)] + \cos^2\chi\, dz_4^2,$$

que difiere de aquélla en el factor $\cos^2\chi$ de la coor-



denada de tiempo. Esta diferencia introduce un cambio profundo en la concepción del Universo, que ya no resulta un hipercilindro de sección esférica, como corresponde a la hipótesis de Einstein, sino que también tiene curvatura en el sentido del tiempo ($G_{44} \neq 0$).

Es interesante señalar que la hipótesis de Einstein deja intacto un problema de laFilosofía natural, cuya importancia y celebridad no desmerecen del de la infinitud del espacio. Me refiero al de la infinitud del tiempo, que plantea el problema del origen y fin de la Creación como cuestión científica. Si la hipótesis de Einstein dió solución al problema del espacio, la de Sitter va más allá barriendo de la ciencia aquella otra preocupación. Y esto sin chocar con el sentido común, qne nos impide concebir el que, avanzando permanentemente en el tiempo, pueda cerrarse el ciclo de la evolución, a la manera como el homoide de un mundo esférico vuelve al punto de partida, no obstante marchar en un sentido que considera siempre el mismo. Hay, en efecto, en el Universo hiperesférico de Sitter una *barrera para el tiempo*, que es la línea ecuatorial del punto ocupado por el observador; pues si éste no se mueve, la ecuación precedente se reduce a

$$d\tau = \cos\chi dz_4.$$

Según ella, cuando $\chi = \frac{\pi}{2}$, $d\tau = 0$, sea cual fuere



dz_4, de modo que un punto material o un rayo de luz, que el observador lance desde el lugar que ocupa, avanza con velocidad constantemente decreciente y termina por detenerse al llegar a los precitados lugares. Dicho de otro modo: se aproxima asintóticamente a ellos.

Bien entendido, se trata de una apreciación del supuesto observador. Otro que marchase con el punto o el rayo en cuestión, tendría conciencia de su evolución permanente, y a su vez consideraría que los fenómenos producidos en el lugar de partida transcurren con lentitud creciente, de modo que el aspecto de la Naturaleza tiende a la inmutabilidad absoluta cuando χ se acerca a $\frac{\pi}{2}$. Así su hodócrona le parece nacer y morir en regiones de reposo absoluto.

Pero si desde el punto de vista considerado las ideas de Sitter son más satisfactorias que las de Einstein, puede señalarse alguno desde el cual la desventaja es manifiesta. He dicho antes que, según la cosmogonía de Einstein, el espacio no es un receptáculo vacío en el que se distribuya la materia, sino que viene creado por ella misma, de suerte que su tamaño es el necesario y suficiente para contenerla. Otro es el caso en la concepción de Sitter. El Universo vuelve a ser para él, como el espacio para Newton, un receptáculo dispuesto para recibir la



materia. En efecto: su acción sobre la curvatura se reduce a un cambio local de su valor, conservándose para el promedio el mismo del vacío.

Claro es que estas razones de orden filosófico no dan motivo bastante para decidir entre ambas hipótesis; pero la nueva generalización del principio de relatividad debida a Weyl, que en varias ocasiones he mencionado, parece dar al pensamiento de Einstein un fundamento lógico más consistente.

72. Antes de ahora he señalado (§ 33) cómo el principio restringido de relatividad conserva la posibilidad de comparar distancias y duraciones en lugares y épocas diferentes, con independencia del movimiento del observador que las ejecute, siempre en el supuesto esencial de que dicho movimiento sea uniforme y rectilíneo; y esto gracias a la invariancia del intervalo ds, que es consecuencia necesaria del grupo de transformación de Lorentz. De otro modo: el principio referido supone un sistema único de indicatrices (§ 50) para todo el Universo, de modo que el valor numérico de ds, lo que con Weyl llamaremos en adelante su *extensión*, se conserva tanto al variar su orientación en un lugar y época definidos, que equivale a la estimación del complejo distancia-duración de un mismo suceso elemental por observadores en movimiento relativo, como para la comparación de dicha entidad en dos sucesos que ocurren en lugares y épocas diferentes, y, por tanto,



corresponden a dominios separados del Universo.

Cuando se postula el principio general de relatividad he afirmado con insistencia que dentro de un dominio elemental las cosas ocurren del mismo modo que en el caso precedente, y, por tanto, la extensión de *ds* se conserva invariante para los cambios de orientación en él. Mas nada asegura que en la traslación de un dominio a otro la invariancia en cuestión persista, ni siquiera suponiendo que aquélla se realiza sin apartarse de una misma línea coordenada, pues estas traslaciones van acompañadas de una deformación de las indicatrices. Por consiguiente, cuando se caracterizan los puntos de una de aquellas líneas coordenadas mediante una serie constantemente creciente de números, sólo se asegura el orden de sucesión de dichos puntos; no es posible establecer entre ellos relaciones métricas definidas. Las coordenadas en el Universo son simples parámetros, no la medida de distancias.

Pero es el caso que sin la posibilidad de establecer relaciones métricas entre diferentes lugares, no cabe hablar de ciencia del Universo, por lo cual es necesario algún postulado que llene el vacío.

Einstein recurrió a extender la invariancia de *ds* para cualquier transporte en el Universo; que físicamente equivale a afirmar la posibilidad de comparar las extensiones (distancias y duraciones), sea cual fuere el lugar y el tiempo en que los sucesos



que las limitan se produzcan. Como este mismo postulado sirvió a Riemann para construir la métrica general de las variedades de cualquier número de dimensiones, la teoría de Einstein equivale a una aplicación al Universo de aquella Geometría; pero no significa esto una prueba de la exactitud de la hipótesis. Su justificación se halla en la brillante conformidad de la imagen que así se obtiene para los fenómenos naturales con la realidad percibida, y de aquí que no quepa atribuirle otro valor que el de una aproximación más estrecha que las anteriores al conocimiento de la Naturaleza. Son ciertamente posibles otros postulados que se ajusten mejor a ella, y en tal sentido la teoría de Einstein es susceptible de nuevas generalizaciones.

73. Tal es el caso de la teoría de Weyl. En vez de admitir que el valor numérico del intervalo

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dz_i dz_k$$

sea el mismo en todos los puntos del Universo, aceptemos que cambia cuando los sucesos que lo definen se trasladan de un dominio a otro. Concretémonos a considerar un metro patrón todos cuyos trazos poseen mecanismos cronométricos que marchan de perfecto acuerdo para un observador ligado a él de modo permanente. El postulado de Einstein significa



que, si bien la distancia entre aquellos trazos y los períodos de los relojes cambian para un observador que no acompañe al metro al ser paseado por el Universo, *entre ambas magnitudes* (distancias y períodos) *existe una relación tal que la extensión del intervalo no se altera.*

Prescindir de dicho postulado para las traslaciones de *ds* de un dominio a otro equivale a afirmar que su extensión contiene un factor variable con estos cambios; pero no cuando se altera su orientación en el mismo lugar. Dicho factor quedará determinado cuando se fije la unidad de longitud que ha de emplearse en cada punto, o sea el sistema de *aforo* del Universo, como dice Weyl.

A priori no es posible afirmar que este sistema se halle impuesto por la Naturaleza. Todo lo que está a nuestro alcance es formular determinadas hipótesis referentes a él, guiados por principios que se imponen al conocimiento. Los corolarios que de aquí deriven se encargarán de condenarlas o justificarlas. Así, el principio de continuidad exige que de un dominio P a otro infinitamente próximo, P + *d*P, la extensión *l* de un intervalo concreto ha de variar en una cantidad infinitamente pequeña, *dl*; que, además, debe ser proporcional a *l*, so pena de renunciar a los fundamentos de la noción de medida. En definitiva, los cambios de cualquier extensión al pasar de P a P + *d*P



se determinarán por

$$d\varphi = \frac{dl}{l} \qquad (73,1)$$

que mide el de la extensión unidad o diferencia de aforos entre aquellos dos puntos. También se comprende sin mayores explicaciones que $d\varphi$ no ha de depender del sistema de coordenadas que se utiliza, de modo que deberá escribirse

$$d\varphi = \varphi_1 dz_1 + \varphi_2 dz_2 + \varphi_3 dz_3 + \varphi_4 dz_4, \qquad (73,2)$$

donde las φ_i son funciones de las z_i que constituyen en conjunto las cuatro componentes de un vector.

Todo esto equivale a decir que el aforo en P + dP queda determinado por el de P, de suerte que una extensión cualquiera l al pasar de P a P + dP experimenta un cambio que es independiente del camino seguido. Pero no puede hacerse igual afirmación si en vez de dos dominios contiguos se trata de otros, P y P′, separados por un intervalo finito. Trasladándose de P a P′ por caminos distintos, la suma $\int d\varphi$ de los cambios infinitesimales $d\varphi$ en el aforo no conducen al mismo valor de φ en el último punto. Ello supondría que $d\varphi$ es una diferencial exacta, lo cual obliga a que las φ_i satisfagan las seis condiciones bien conocidas en el análisis matemático

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_k} = 0. \qquad (73,3)$$



Naturalmente, el caso más general para (73, 2) es que las f_{ik} no cumplan con las (73, 3), y entonces su conjunto define un tensor cuya interpretación analítica es análoga a la curvatura. Nótese que así como aquélla era responsable de que trasladando una reglilla de un lugar a otro paralelamente a sí misma por caminos diferentes las posiciones finales no coincidan, a pesar de que las iniciales satisfagan dicha condición, éste expresa el hecho de que la extensión de la propia reglilla en el lugar final depende también del camino por el cual ha sido transportada.

Tal paralelismo se continúa para determinadas propiedades que debemos señalar. Así las componentes del tensor de curvatura G_{ij} son independientes del sistema de coordenadas utilizado, aunque sí cambian los potenciales gravitatorios g_{ij} que en ellas figuran directamente y mediante sus primeras y segundas derivadas. De modo análogo las f_{ik} no varían con el aforamiento, en tanto no se alteren las hipótesis fundamentales arriba formuladas y que condujeron a (73, 2). Dichas hipótesis no bastan para determinar las φ_i; pero la parte arbitraria que en ellas queda se elimina al calcular las f_{ik}.

En efecto; para un nuevo aforamiento, como, por ejemplo, aquél para el cual $l' = \lambda l$, donde λ es una función arbitraria de las coordenadas

$$d\varphi' = \frac{dl'}{l'} = \frac{dl}{l} + \frac{d\lambda}{\lambda},$$



o sea $d\varphi' = d\varphi + d. \log \lambda$,

cuyo último término no puede contribuir al valor f_{ik}.

Es de notar que el caso en que las f_{ik} son nulas, es la forma más general de la hipótesis de invariancia de la extensión formulada por Einstein.

74. Llegados a esta altura en nuestros razonamientos, se ofrece al espíritu la necesidad de encontrar interpretación física para las φ_i y las f_{ik}, de modo paralelo a como Einstein dió contenido real a las g_{ik} y G_{ik} por la explicación de los fenómenos gravitatorios mediante las particularidades de la curvatura del Universo.

Este mérito ha correspondido a Weyl.

He tenido ya ocasión de decir que merced al estudio de las relaciones entre los fenómenos físicos, sus agentes productores se reducen a dos: la gravedad y el campo electromagnético. Ya tal circunstancia sugiere la posibilidad de que este último campo corresponda al sistema de aforo del Universo, y la presunción se convierte en evidencia habida cuenta del paralelismo estrecho que existe entre la teoría de dicho campo y la del sistema de aforo. En efecto: al vector de componentes φ_i corresponde el potencial electromagnético P_i, del cual derivan las componentes de los campos $\vec{H}$ y $\vec{E}$ por las operaciones (10, 5) y (10, 11) formalmente idénticas a las (73, 3).

La identificación de φ_i con P_i, acarrea la del ten-



sor f_{ik} con el h_{ik} (§ 10), y gracias a ella, la indeterminación del vector φ_i adquiere un sentido físico perfectamente definido, pues la hace derivar de la conservación de las cargas eléctricas (10, 15). He aquí cómo una nueva ley de conservación corresponde a la libertad de aforo del Universo, de modo análogo a como aquellas otras relativas a la energía y la cantidad de movimiento eran corolario de la equivalencia de todos los sistemas de coordenadas empleables para referir la posición de un punto.

Una consecuencia inmediata de la interpretación física de las φ_i es que sólo en aquellas regiones del Universo en las cuales el campo electromagnético no existe es donde el sistema de aforo queda perfectamente definido eligiendo la unidad de extensión en un punto.

La identidad de las ecuaciones fundamentales de las teorías del campo electromagnético y del aforo del Universo, nos aseguran contra el riesgo de futuras contradicciones; pero en compensación nos impiden esperar una prueba experimental directa de esta teoría, comparable con la que se ha podido encontrar en la de la gravitación. La posibilidad de tales pruebas descansa siempre en que el nuevo modo de interpretar los fenómenos exija correcciones más o menos sensibles en las ecuaciones fundamentales. Cuando éstas quedan inalteradas, como acabo de decir ocurre en el caso que me ocupa, los únicos argumentos aducibles han de apoyarse en la superior



armonía que de los nuevos puntos de vista se derivan para la concepción del Universo. Y no es fácil, no ya negar, ni siquiera acoger con indiferencia el avance que en tal sentido supone colocar los dos agentes únicos que provocan todos los fenómenos naturales en el mismo plano, como elementos que fijan la métrica del Universo. Como la gravitación en la teoría de Einstein, es la electricidad en la de Weyl una manifestación de la métrica de aquél, en vez de una entidad que en él se aloja.

75. La síntesis perfecta del conocimiento no resulta sólo de haber llevado al mismo plano las únicas acciones que determinan el estado físico del Universo: la gravitación y la electricidad. Aparece más brillantemente por la unidad de método para obtener las leyes naturales, apoyándose en el principio de la menor acción. Hemos visto antes (§§ 66 y 67) cómo este principio permite obtener separadamente las diez ecuaciones del tensor de curvatura G_{ik} y las cuatro de la corriente eléctrica $\mathscr{C}^i$ (67, 1), que son la expresión de dichas leyes en forma invariante respecto de la elección del sistema de coordenadas, adoptando como función de Hamilton para el primer caso el invariante de curvatura $\mathscr{G}$, y para el segundo, la magnitud $h = {}^1/_4 \sum_{ik} h_{ik} h^{ik}$, que también es una escalar. De estas dos funciones, $\mathscr{G}$ sólo contiene las g_{ik} y sus primeras y segundas derivadas, y h los potenciales electromagnéticos, P_i, sus derivadas y las g_{ik}.

El nuevo avance de Weyl consiste en emplear una sola función de Hamilton, $\mathscr{H}$, que contiene las g_{ik}, las P_i (o las φ^i) y sus respectivas derivadas, a más, dicho se



está, de las coordenadas x_i. Si entonces se afirma la invariancia de la acción

$$\int_D \mathcal{H} dZ$$

frente a una transformación de coordenadas y de aforamiento, se obtienen aquellas leyes fundamentales, juntamente con las cinco de la conservación de la enegía, de las componentes de la cantidad de movimiento y de la carga eléctrica; las cuales aseguran la libertad para escoger el sistema de coordenadas y la unidad de medida, como exige el principio de relatividad.

Para deducir leyes más concretas que puedan ser contrastadas por la observación, cuales son las de los tres fenómenos previstos por Einstein y confirmados en la forma que hemos visto en el capítulo VI, es indispensable atribuir a la función de Hamilton una forma definida. Weyl se deja guiar por las anteriores aplicaciones del principio de mínima acción y escribe:

$$\mathcal{H} = -{}^1/_4 F^2 \sqrt{-g} + \alpha \sum_{ik} h_{ik} \mathfrak{h}^{ik},$$

cuyo primer término representa físicamente el volumen medido con el radio de curvatura como unidad, magnitud que reemplaza al invariante $\mathcal{G}$ de las anteriores aplicaciones del método hechas por Lorentz, Hilbert y Einstein. En cuanto al segundo es la misma función de Hamilton utilizada para el campo electromagnético, sin más diferencia que el factor numérico α.

El aforamiento del Universo por el radio de curvatura es de capital importancia en la teoría de Weyl, pues gracias a él se obtienen del modo más natural posible las conclusiones a que Einstein llegó al adoptar para ecuaciones del campo gravitatorio las (68, 1). Por



otra parte, el radio del electrón resulta medido por $\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$, que explica la constancia de dicha magnitud por una condición intrínseca de la métrica del Universo y permite escapar a la dificultad que la ley de la repulsión de las cargas eléctricas del mismo signo opone a la existencia de la referida unidad. En otros términos: la presión etérea con que Poincaré quiso evitar su dispersión se sustituye aquí por la condición de que su radio sea una fracción constante de la curvatura del espacio. Así el electrón no se conserva cuando pasa de unos dominios a otros del Universo, sino que se amolda a las condiciones de estos lugares.

Volviendo a la función $\mathcal{H}$, es de notar que de ella no se deducen exactamente los resultados que de la teoría de Einstein, pero las diferencias son magnitudes de segundo orden, por lo cual pueden considerarse igualmente compatibles con las observaciones actuales. En particular, puede señalarse que el corrimiento hacia el rojo de las rayas espectrales procedentes de átomos situados en campos gravitatorios intensos, respecto de las que provienen de otros idénticos en campos débiles, no tiene aquí un caracter de necesidad tan firme. Pero en todo caso, aunque sean diferencias inapreciables las que separan los resultados previstos por las teorías de Einstein y de Weyl, existe un aspecto de esta última que ofrece positiva dificultad. A saber: dos átomos perfectamente idénticos en un momento y lugar dados, si vuelven a encontrarse después de haber sufrido vicisitudes muy diversas, sus estados físicos no pueden ser absolutamente coincidentes: en particular, las frecuencias de sus rayas espectrales no serán iguales, en contra de lo que parece bien confirmado por la experiencia y la ob-



servación extendida a los más remotos confines del Universo.

76. En el capítulo II he analizado con todo detalle el proceso lógico por el cual la Física anterior al principio restringido de relatividad estableció la noción del *éter*. Pero es de advertir que tal proceso no coincide con el histórico. El éter fué inicialmente considerado como un medio material, cuyas cualidades se elegían comparando los fenómenos que acompañan a la propagación de la luz con los que se producen en el movimiento ondulatorio de un medio elástico; y de este modo se llegó a concebirle como un flúido desprovisto de viscosidad para la traslación lenta de un cuerpo en su seno, y en cambio dotado de la rigidez del acero para las perturbaciones muy rápidas (Stokes).

Esta noción grosera fué reemplazada por el éter de Lorentz, a que más propiamente me referí en el capítulo citado, el cual en cierto modo se reduce a un nombre dado al conjunto de las ecuaciones que entonces discutí; o mejor, al sistema de referencia respecto al cual dichas ecuaciones pueden adoptar las formas (10, 12) y (10, 14).

Ahora bien: cuando Einstein demostró que dichas formas son aquellas en que aparecen las leyes fundamentales del campo electromagnético para cualquier observador que se supone en reposo, fué ne-



cesario elegir entre la negación de la realidad objetiva del éter o suponer un número infinito de ellos que llenan simultáneamente el espacio y son absolutamente permeables los unos a los otros. La elección del primer término del dilema parece ser lo más sencillo, y por él se decidieron muchos, particularmente el propio Einstein; mas para otros pareció de imposible concepción un campo electromagnético sin soporte, tanto más cuanto la teoría electrónica tiende a reducir toda la realidad a dicho campo, explicando la materia por las cargas y éstas por singularidades de aquél. De esta opinión era, entre otros, Lorentz.

La relatividad general ha planteado nuevamente la cuestión, al considerar el campo gravitatorio como una manifestación de la curvatura del espacio, aun donde no existe materia alguna, incluyendo en ella a la radiación. Según esta teoría, en el vacío absoluto debe quedar alguna realidad física que responda a las ecuaciones del referido campo, y como es esto lo único que de ella sabemos, parece completamente justificado el que, imitando lo hecho con el éter electromagnético, interpretemos dichas ecuaciones como la descripción del estado de uno nuevo, tan alejado del de Lorentz, como éste lo estuvo del de Fresnel. No se trata, pues, de la resurrección del primero, que la ciencia del principio restringido sepultó, sino de una nueva creación que el mismo Einstein patrocina sin rectificar su anterior pensamiento.



Y es de advertir que, no obstante la esencial diferencia señalada entre la nueva y las antiguas nociones del éter, también llena el cometido que le imponen los espíritus que sólo encuentran satisfacción imaginando que toda la realidad que percibimos es simple manifestación del estado físico de tal medio, espíritus que son legión entre los cultivadores de la Filosofía natural. Además, las ideas de Weyl están muy próximas de darles plena satisfacción, pues los últimos elementos integrantes de la materia, el electrón negativo y el protón positivo, quedan por ellas reducidos a singularidades de los campos gravitatorio y electromagnético (de la curvatura y del aforo del Universo), de los cuales sólo pueden conocerse los valores invariantes de su masa m y su carga e, determinados por el flujo de dichos campos a través de superficies que envuelven de cerca a los referidos puntos singulares.



[illegible]

debe quedar alguna realidad física que responda a las ecuaciones del referido campo, y como es esto lo único que de ella sabemos, parece completamente justificado el que, haciendo lo hecho con el éter electromagnético, interpretemos dichas ecuaciones como la descripción del estado de uno nuevo, tan alejado del de Lorentz, como éste lo estuvo del de Fresnel. No se trata, pues, de la resurrección del primero, que la muerte del principio restringido sepultó, sino de una nueva creación que el mismo Einstein patrocina sin rectificar su anterior pensamiento.



APÉNDICE

NOTA PRIMERA

Magnitudes escalares, vectores y tensores

1. Las magnitudes físicas, desde el punto de vista de sus caracteres métricos, tienen propiedades que conducen a clasificarlas en grupos. Las de condición más sencilla quedan completamente determinadas por un número, de modo que bastará elegir una unidad o establecer una escala de referencia para que sea factible la representación analítica de la magnitud en cuestión. Por esto se las llama *escalares*. Pueden citarse como ejemplos la densidad de un medio material o de las cargas eléctricas, la temperatura, la energía, etcétera.

Siguen en orden de complejidad aquellas magnitudes que no se definen plenamente por su valor numérico, sino que requieren, además, sea especificada su dirección y su sentido en ella. Ejemplos son: la fuerza, la velocidad, etc. Se les da el nombre de *vectores*.

Aun se pueden distinguir otras magnitudes con dirección propia, pero sin sentido definido, como una presión o una tracción. Aparentemente son más sencillas que los vectores, puesto que falta en ellas una de las carac-



terísticas de aquéllos, pero pronto veremos que en realidad son más complejas. Estas últimas magnitudes se las denomina *tensores*.

Hoy se va generalizando este nombre para la representación analítica de cualquier magnitud física. Los diferentes grupos arriba señalados se distinguen entonces por lo que se llama el *grado* del tensor: una escalar es un tensor de grado 0, un vector de grado uno, el tensor propiamente dicho es de segundo grado, y aun se distinguen tensores de orden superior.

2. La mayoría de las veces las magnitudes físicas varían de un lugar a otro y con el instante en que se consideran, por lo cual sus expresiones analíticas han de contener como variables independientes los parámetros que sirven para la determinación de ambas condiciones.

Colocándonos en el punto de vista de la ciencia clásica, el tiempo y el espacio son absolutamente independientes, de suerte que la representación numérica del primero no se altera al cambiar el modo de determinar el lugar del espacio. Esto permite prescindir de aquél en el estudio de la distribución espacial de las magnitudes físicas. Tal distribución, que constituye lo que se llama *campo* de la magnitud, viene a ser la imagen instantánea del fenómeno real que la naturaleza nos ofrece.

Ya se dice en el texto (§ 2) que un punto del espacio se fija por sus tres coordenadas cartesianas, x_1, x_2, x_3, y aun se agrega que existe una amplia libertad para elegir el sistema de ejes a que se refieren; libertad que no se ha de entender en el sentido estricto de orientarles arbitrariamente, sino también de utilizar otros modos de determinar sin ambigüedad un punto del espacio.



Por ejemplo: en vez de las distancias a los tres planos $X_2 X_3$, $X_3 X_1$, $X_1 X_2$, de la figura 1.ª, se pueden adoptar: la distancia r a un punto fijo 0 (fig. 27), el ángulo ψ que el radio vector OP forma con una recta fija OZ, y el λ del plano ZOP con otro ZOΩ, también fijo. En este sistema, llamado polar, como en el cartesiano,

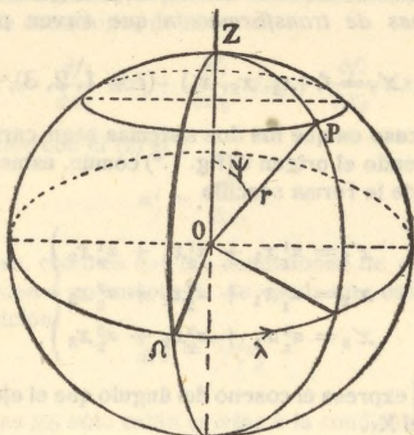


Fig. 27

P se halla en la intersección de tres superficies, que en vez de tres planos son: la esfera de radio r, el cono de revolución de semiángulo ψ y el plano que forma con ZOΩ el ángulo λ contado en el sentido de la flecha. En todo caso el número de parámetros necesarios es tres, que expresa el de dimensiones características del espacio, y cada uno de ellos corresponde a una familia de superficies, que se cortan mutuamente según líneas di-



ferentes. Esto es, tres superficies, una de cada familia, sólo tienen un punto común: el P que definen.

Es notorio que la libertad para elegir el sistema de referencia implica la posibilidad de pasar de unos a otros; esto es, deducir los valores de las coordenadas de un punto en un sistema cuando se conocen las correspondientes en otro. La forma más general de las *ecuaciones de transformación* que sirven para este fin es

$$x'_i = f_i\,(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (1)$$

En el caso en que los dos sistemas sean cartesianos, y suponiendo el origen 0 (fig. 1.ª) común, estas ecuaciones son de la forma sencilla

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= \alpha^1_1 x_1 + \alpha^1_2 x_2 + \alpha^1_3 x_3 \\ x'_2 &= \alpha^2_1 x_1 + \alpha^2_2 x_2 + \alpha^2_3 x_3 \\ x'_3 &= \alpha^3_1 x_1 + \alpha^3_2 x_2 + \alpha^3_3 x_3 \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

donde α^i_j expresa el coseno del ángulo que el eje X'_j forma con el X_i.

Recordemos también que estos cosenos satisfacen a las condiciones

$$\left.\begin{aligned} \sum_i \alpha^l_i \alpha^k_i &= \begin{cases} 1 & l = k \\ 0 & l \neq k \end{cases} \\ \sum_i \alpha^i_l \alpha^i_k &= \begin{cases} 1 & l = k \\ 0 & l \neq k \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

que se llaman de *ortogonalidad,* pues indican que los X_i y los X'_i son mutuamente perpendiculares.

Si se trata de sistemas cualesquiera, pero nos limita-



mos a considerar regiones infinitamente pequeñas alrededor del origen, que es el caso útil cuando se supone que las leyes naturales sólo pueden relacionar lugares vecinos; esto es, si se barren de la ciencia las acciones a distancia, es siempre posible reemplazar (1) por un sistema de ecuaciones de la forma

$$dx'_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_i}{\partial x_3} dx_3, \qquad (2')$$

que coincide con el (2) si

$$\alpha^i_j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}. \qquad (4)$$

Entonces, claro es que las condiciones de ortogonalidad pueden o no cumplirse, de modo que escribiendo por definición

$$g_{ij} = \sum_l \alpha^l_i \alpha^l_j$$

a priori las g_{ij} sólo están sujetas a la condición

$$g_{ij} = g_{ji},$$

y en el caso del sistema ser ortogonal

$$\left.\begin{aligned} g_{ik} &= \quad 0 \quad \text{si} \quad i \neq k \\ g_{ik} &= \pm 1 \quad \text{si} \quad i = k \end{aligned}\right\}. \qquad (3')$$

Cuando nos referimos al espacio ordinario se introduce el signo $+$, pero en el Universo de Minkowski para $i = k = 4$ el signo es el $-$.

Hasta aquí hemos considerado el cambio de sistema de coordenadas en un sentido determinado; paso de las x_i a las x'_i. Frecuentemente es necesario realizar la



transformación inversa, que con las limitaciones impuestas últimamente, se reduce a resolver el sistema (2) respecto de las x_i. La teoría de las ecuaciones lineales nos dice que así se obtendrá

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A^1_1 x'_1 + A^2_1 x'_2 + A^3_1 x'_3 \\ x_2 &= A^1_2 x'_1 + A^2_2 x'_2 + A^3_2 x'_3 \\ x_3 &= A^1_3 x'_1 + A^2_3 x'_2 + A^3_3 x'_3 \end{aligned}\right\}, \qquad (5)$$

donde claramente pueden escribirse en vez de las coordenadas sus diferenciales. Las A^i_j son los menores del elemento α^i_j en el determinante

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 & \alpha^1_3 \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 & \alpha^2_3 \\ \alpha^3_1 & \alpha^3_2 & \alpha^3_3 \end{vmatrix},$$

divididos por el mismo α, y se confunden con las propias α^i_j cuando se cumplen las condiciones (3).

3. Volviendo a las magnitudes físicas, respecto de las escalares sólo he de decir que su expresión analítica no debe cambiar con el sistema de ejes que sirve para definir los puntos del espacio, de suerte que en todos los casos deben ser *invariantes* de la transformación.

En cambio, sí conviene que fijemos la atención en los vectores. En ellos es necesario distinguir su valor numérico o *módulo* de la dirección y sentido que les son propios y constituyen su *argumento*. Por esto su repre-



sentación gráfica más adecuada es una flecha, cuya longitud corresponde al módulo y la orientación al argumento. Para determinar el primero basta la elección de una unidad, pero la definición del segundo exige individualizar la recta, y, por tanto, el empleo de un sistema de referencia. En efecto: las tres proyecciones sobre los ejes de un segmento infinitamente pequeño, tomado sobre el argumento, llenan todas las condiciones necesarias para este fin. Sus valores son proporcionales a los tres coeficientes

$$\underset{s}{\alpha}^1, \ \underset{s}{\alpha}^2, \ \underset{s}{\alpha}^3$$

del segmento, considerado como uno de los ejes de un cierto sistema de referencia en las ecuaciones (2), y ellos son los verdaderos elementos característicos del argumento que en coordenadas cartesianas constituyen los cosenos directores de la recta.

Entre las varias notaciones propuestas para representar los vectores y sus elementos, consideramos preferible la siguiente:

$\vec{a}$ es un vector.

a su módulo; y

$\vec{a}^0$ su argumento, geométricamente definido por el vector unidad en la dirección y sentido propios del $\vec{a}$. Esta notación se halla de acuerdo con el significado que en análisis tiene el exponente 0.

Corrientemente en los cálculos conviene reemplazar el vector por sus *componentes* según los ejes que designaremos por a_1, a_2, a_3, cuando se refieren, respectivamente, a los ejes X_1, X_2, X_3. Sus magnitudes se determinan por las ecuaciones

$$a_1 = \underset{s}{\alpha}^1 a, \quad a_2 = \underset{s}{\alpha}^2 a, \quad a_3 = \underset{s}{\alpha}^3 a,$$



generalización de las que expresan las proyecciones de un segmento sobre los ejes de un sistema cartesiano. Cuando las condiciones de ortogonalidad (3) se cumplen, es notorio que entre las componentes y el módulo existe la relación

$$a^2 = \sum_i a_i^2. \qquad (6)$$

El vector $\overrightarrow{a}$, como medida de una magnitud física que es, sólo depende de las circunstáncias en que el fenómeno correspondiente se produce, y no del sistema de coordenadas que caprichosamente elijamos para referir los puntos de la región del espacio en que se halle localizado. Esto quiere decir que tanto el módulo como el argumento del vector, son invariantes para todas las transformaciones del sistema de referencia; pero es notorio que las componentes, cuyos valores expresan la posición del vector respecto de los ejes, han de variar con ellos. La propia definición que he dado de ellas demuestra que sus ecuaciones de transformación son las (2′) correspondientes a un segmento infinitesimal, que en atención a las definiciones (4) se convierten en las (2). Puesto que el módulo es un invariante, la ecuación (6) lleva a escribir como definición general del mismo

$$a^2 = \sum_{ij} g_{ij} a_i a_j.$$

Las propiedades de transformación de las componentes pueden servir como definición de esta clase de magnitudes cuando se quiere prescindir de la representación geométrica. Así un vector es el *conjunto de tres funciones de las coordenadas* a_1, a_2, a_3, *que al cam-*



biar de ejes de referencia se transforman como las proyecciones sobre ellos de un segmento elemental dx_1, dx_2, dx_3.

Esta definición tiene la ventaja de ser generalizable al caso de cualquier número de dimensiones donde habría *n* componentes en vez de tres.

4. Las leyes naturales enuncian la correlación de fenómenos físicos, de suerte que en sus expresiones analíticas deben figurar combinadas magnitudes escalares, vectoriales y tensoriales, con la condición evidente de que dicha expresión sea un invariante. Claro es que tales magnitudes son simultáneas y se refieren al mismo punto del espacio. También es notorio que los diferentes términos de las repetidas expresiones analíticas han de ser homogéneos, o, lo que es equivalente, la suma sólo puede realizarse sobre tensores del mismo grado.

Dejando a un lado la combinación de magnitudes escalares exclusivamente, para lo cual basta el cálculo ordinario, fijaremos por ahora la atención en el cálculo de vectores solos o unidos a escalares. *Para sumar vectores basta agregar las componente homólogas de todos ellos.* Así la suma de $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...

$$\vec{A} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \ldots$$

es el vector cuyas componentes se obtienen por expresiones de la forma

$$A_i = a_i + b_i + c_i + \ldots$$

Cuando se trata de un espacio de tres dimensiones, esto conduce a la regla bien conocida del polígono.

Por multiplicación, un vector puede combinarse con



una escalar, dando lugar a un nuevo vector del mismo argumento y cuyo módulo es el producto del antiguo por la escalar. Ejemplo de este caso es la expresión del peso de un cuerpo mediante el producto de su masa m por la intensidad de la gravedad $g : p = mg$.

La combinación de dos vectores por producto es más compleja. El caso más sencillo es el de determinadas magnitudes que vienen expresadas mediante

$$ab \cos(\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}),$$

donde $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son vectores. Tal es, por ejemplo, el trabajo de una fuerza $\overrightarrow{F}$ cuyo punto de aplicación describe el segmento $\overrightarrow{l}$ que forma un cierto ángulo con aquélla:

$$T = Fl \cos \alpha.$$

Esta magnitud es un número, y por eso se le llama el *producto escalar* o interno de los dos vectores. Aplicando un teorema bien conocido de geometría analítica, se reconoce inmediatamente que el referido producto tiene también la forma

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_i a_ib_i. \qquad (7)$$

Cuando se generaliza esta definición al caso de coordenadas no cartesianas, se cae en la cuenta de que si (7) ha de ser una escalar, y, por tanto, invariante, los dos factores se comportan de diferente modo en la transformación de coordenadas: sólo uno de ellos satisface a la definición que he dado de los vectores. En efecto; expresemos la invariancia del producto, escribiendo:

$$\sum_i a'_ib'_i = \sum_i a_ib_i,$$



y reemplacemos en vez de a'_i sus valores en función de a_i, suponiendo que es éste el vector que, por hipótesis, cumple con las condiciones de la definición. Se obtiene así:

$$a_1 \left| \begin{matrix} \alpha^1_1 b'_1 + \\ \alpha^1_2 b'_2 + \\ \alpha^3_1 b'_3 + \end{matrix} \right. a_2 \left| \begin{matrix} \alpha^1_2 b'_1 + \\ \alpha^2_2 b'_2 + \\ \alpha^3_2 b'_3 \end{matrix} \right. a_3 \left| \begin{matrix} \alpha^1_3 b'_1 + \\ \alpha^2_3 b'_2 + \\ \alpha^3_3 b'_3 \end{matrix} \right. = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Como $\overrightarrow{a}$ puede ser cualquiera, se deduce de aquí que

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \alpha^1_1 b_1 + \alpha^2_1 b_2 + \alpha^3_1 b_3 \\ b_2 &= \alpha^1_2 b_1 + \alpha^2_2 b_2 + \alpha^3_2 b_3 \\ b_3 &= \alpha^1_3 b_1 + \alpha^2_3 b_2 + \alpha^3_3 b_3 \end{aligned} \right\} . \qquad (8)$$

Para comparar este sistema con el de transformación del vector $\overrightarrow{a}$ conviene resolverle respecto de las b_i. Se reconoce inmediatamente que el sistema de transformación de este vector es el

$$b'_1 = A^1_1 b_1 + A^1_2 b_2 + A^1_3 b_3$$

$$b'_2 = A^2_1 b_1 + A^2_2 b_2 + A^2_3 b_3$$

$$b'_3 = A^3_1 b_1 + A^3_2 b_2 + A^3_3 b_3$$

donde las A^i_j tienen la misma significación que en (5). Sólo cuando se cumplen las condiciones (3), como ocu-



Así, un tensor es un conjunto de n^2 magnitudes que se llaman sus *componentes*, las cuales al cambiar de sistema de coordenadas se transforman, según ecuaciones del tipo

$$p_{ij}' = \sum_{hk} \frac{\partial x_h}{\partial x'_i} \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} p_{hk}, \quad (12)$$

donde los subíndices pueden tomar todos los valores enteros hasta el número n que indica las dimensiones del espacio. En el caso corriente $n = 3$, de modo que el número de componentes es 9.

El caso más sencillo de magnitudes de esta clase es aquel en que

$$p_{ij} = a_i b_j;$$

esto es, las componentes del tensor son productos binarios de las correspondientes a dos vectores. En efecto; las propiedades de tranformación de éstos hacen que las ecuaciones (12) se cumplan para este caso.

El precedente ejemplo de tensor sugiere inmediatamente la necesidad de distinguir tres clases de tensores que corresponden a los vectores contravariantes y covariantes. Los ejemplos más sencillos de estas tres clases son:

$$p_{ij} = a_i b_j$$
$$p^{ij} = a^i b^j$$
$$p_i{}^j = a_i b^j.$$

Los primeros se llaman covariantes, los segundos contravariantes y los últimos mixtos. Sus definiciones más generales se fundan en las ecuaciones de transfor-



mación, que para los primeros se han dado ya en (12), y para los otros dos son:

$$p^{ij'} = \sum_{hk} \frac{\partial x'_i}{\partial x_h} \frac{\partial x'_j}{\partial x_k} p^{hk}$$

$$p_i{}^{j'} = \sum_{hk} \frac{\partial x_h}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_j}{\partial x_k} p_h{}^k.$$

Existen dos grupos particulares de tensores que conviene señalar: los *simétricos,* cuyas componentes satisfacen a las condiciones

$$p_{ij} = p_{ji},$$

y los *pseudosimétricos,* definidos por las condiciones

$$p_{ij} = -p_{ji}.$$

El número de componentes de los primeros se reduce a $\frac{1}{2} n (n + 1)$, de modo que cuando $n = 3$ habrá 6, y cuando $n = 4$, 10. El ejemplo más interesante de esta clase de tensores lo forman las magnitudes que hemos designado por g_{ij}, y se le llama *tensor fundamental.*

El número de componentes de los tensores pseudosimétricos es $\frac{1}{2} (n - 1) n$. El ejemplo más interesante lo ofrece el definido por componentes del tipo

$$p_{ij} = a_i b_j - a_j b_i,$$

que geométricamente representa el área limitada por los dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, supuesto recorrido el contorno (figura 28) en el sentido que indica el orden en que aquéllos aparecen escritos. Cuando $n = 3$ el número de com-



ponentes es también 3, lo cual hizo que se le confundiera con un vector ordinario, dándosele el nombre de *producto vector*, con el sentido de avance de un tornillo normal al plano de los dos vectores, y girando del primero al segundo. Esta definición implica la existencia de un sentido privilegiado de rotación incompatible con el principio de relatividad. En el caso de 4 dimensiones, las componentes de este tensor son 6, por cuyo motivo se le denominó en relatividad restringida *sextivector*.

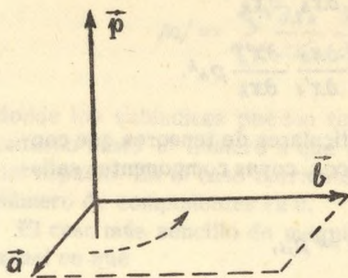


Fig. 28

6. Las operaciones que pueden realizarse con los tensores guardan estrecha analogía con las que hemos considerado en el caso de los vectores. En primer término, es notorio que sólo pueden sumarse los que son de la misma especie, siendo la suma un nuevo tensor homólogo con ellos, cuyas componentes se forman por adición de las de los sumandos.

En segundo lugar, existe también aquí un producto escalar, cuya expresión es

$$\sum_{ij} p_{ij} q^{ij} = \text{inv.} \tag{13}$$

La demostración más general de esta proposición se hace fundándose en las propiedades de transformación que definen a estas magnitudes; pero puede lograrse la convicción de su exactitud considerando el caso parti-



cular en que

$$p_{ij} = a_i b_j, \quad q^{ij} = c^i d^j,$$

pues entonces el producto a que me vengo refiriendo se descompone en el de los productos escalares de vectores:

$$\sum_{ij} p_{ij} q^{ij} = \sum_i a_i c^i \cdot \sum_j b_j d^j.$$

La propiedad precedente permite definir las distintas clases de tensores de modo análogo a como hemos visto en los vectores. Así, cuando las n^2 funciones p_{ij} son tales que

$$\sum_{ij} p_{ij} a^i b^j = \text{inv.}$$

designando por a^i y b^j las componentes de dos vectores cualesquiera, aquellas funciones son las componentes de un tensor covariante.

De aquí se deduce que

$$\sum_i p_{ij} a^i \tag{14}$$

son las componentes c_j de un vector covariante, puesto que la suma de sus productos por las b^j es un invariante. Análogamente

$$\sum_i p^{ij} a_i = c^j$$

$$\sum_i p_i^j\, a^i = c^j.$$

Esta operación por la cual se pasa de un tensor cualquiera a un vector se llama *contracción*.



Un caso particular de contracción que conviene señalar es aquel en que interviene el tensor fundamental g_{ij}, o el que tiene por componentes los menores del determinante (1):

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \cdot \cdot \cdot \cdot & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} \cdot \cdot \cdot \cdot & g_{2n} \\ \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} \cdot \cdot \cdot \cdot & g_{nn} \end{vmatrix}$$

divididos por el propio determinante, a los cuales designaremos por g^{ij}, o aun el

$$g_i{}^j = g_{ik} g^{jk},$$

cuya característica es que todas sus componentes con $i = j$ son la unidad, y nulas las restantes ($i \neq j$), como se deduce inmediatamente teniendo en cuenta la definición de las g^{ij}.

Ahora bien: consideremos un tensor obtenido por contracción, según (14) o cualquier fórmula análoga, pero en que interviene el tensor fundamental o los derivados de él. Por ejemplo:

$$\sum_i g_{ij} a^i = c_j,$$

$$\sum_i g_{ih} p^{ij} = q_h{}^j,$$

$$\sum_{ij} g^{ih} g^{jk} p_{ij} = q^{hk}.$$

(1) En el espacio ordinario el determinante es positivo; pero en el Universo tiene el signo —. Como este es el caso que nos interesa, supondremos que g lleva incluído dicho signo.



Cuando el sistema es ortogonal, las condiciones (3') demuestran que estos tensores contraídos son

$$a^j = c_j,$$
$$p^{ij} = q_i{}^j,$$
$$p_{hk} = q^{hk};$$

esto es, tensores de igual valor, pero cuyos grados de covariancia y contravariancia aumentan en una unidad por cada vez que interviene g_{ij} y g^{ij}, respectivamente. Otro modo de formular la misma propiedad: en los sistemas ortogonales las componentes de un tensor se pueden considerar indistintamente como covariantes o contravariantes.

De aquí nace una regla aplicable a un sistema de referencia cualquiera. A saber: un tensor posee tres conjuntos de componentes: covariantes, contravariantes y mixtas, que son, en general, diferentes entre sí, pudiéndose pasar de las unas a las otras por contracción, utizando el tensor fundamental y sus derivados. En los sistemas ortogonales todas estas componentes son iguales.

7. Es notorio que los tensores aparecen, según dije más arriba, como magnitudes cuya diferencia esencial con los vectores es, simplemente, un grado más de complejidad. De modo análogo pueden considerarse tensores de grado superior al segundo, cuya teoría no es difícil de formar por simple generalización de lo que hemos visto para los casos precedentes. Esto explica y justifica la tendencia actual a dar a todas estas magnitudes el nombre general de tensores, distinguiéndolas entre sí por el grado.

Correspondería ahora que formulásemos las leyes del análisis de los tensores en forma generalizable a cual-



quier sistema de coordenadas y número de dimensiones del espacio; pero esto nos llevaría demasiado lejos, sin ser necesario para la claridad del texto.

Me limitaré a llamar la atención sobre el siguiente hecho: En análisis ordinario la derivada de una magnitud respecto de una coordenada representa su cambio de valor por unidad de variación de dicha coordenada en el punto que se considera; de modo que si la magnitud permanece constante, la derivada es nula. Si las coordenadas son generales, el caso es otro para las componentes de un tensor, puesto que su variación, al pasar de un punto a otro, puede depender tanto de que el tensor mismo cambie como de la curvatura de las coordenadas. Así, la derivada de un tensor tiene dos partes: una que coincide con la derivada parcial ordinaria, y otra dependiente de la referida curvatura. Por vía de ejemplo diré que la derivada del vector es el tensor de componentes

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \Gamma^{k}_{ij} A_k.$$

8. Hasta aquí me he limitado a considerar los tensores en sus relaciones con los cambios de coordenadas, para los cuales el tensor mismo es un invariante como expresión de una propiedad física, pero no lo son sus componentes. Mas en el texto se ha visto que, no sólo tenemos libertad para alterar el sistema de referencia, sino también para elegir un patrón de longitud arbitrario en cada punto, con las condiciones impuestas por la ley de continuidad. Claro es que esto lleva a afirmar que sólo pueden ser tensores físicos aquellos que permanezcan invariantes al cambiar el sistema de aforo del



Universo. Ahora bien: al cambiar el aforo en la proporción λ cada tensor, en general, queda multiplicado por la potencia λ^p, donde p puede tener valores positivos, negativos o también ser nulo. Sólo en este último caso hay invariancia, y, por consiguiente, sólo entonces el tensor corresponde a una realidad física. Los restantes, que se dicen poseer el *peso* o *dimensión* $\frac{p}{2}$ son meros auxiliares para los cálculos. En este caso se encuentra el tensor fundamental, pues si variando el aforo el intervalo elemental cambia como λ, es menester que sus coeficientes vengan multiplicados por dicho número, de modo que el peso de las g_{ij} es $+1$. Evidentemente, el escalar g tendrá el peso $+4$ y las g^{ij} -1.

Consideremos ahora el tensor h^{ij} que representa el campo electromagnético. Según se ha dicho en el texto (§ 74), es idéntico al tensor de aforo f_{ij}, de modo que su peso es nulo como requiere su naturaleza física. Ahora bien: si queremos formar el invariante más sencillo del tensor h_{ij} para constituir con él la acción del campo, nos vemos conducidos a la expresión

$$\sum_{ij} h_{ij} h^{ij}$$

que, sin embargo, no puede representar una magnitud física, pues

$$h^{ij} = g^{ih} g^{jk} h_{hk}$$

es de peso -2. Pero es el caso que la acción no es realmente $\sum_{ij} h_{ij} h^{ij}$, sino su integral extendida al dominio del Universo en que existe el campo, en la cual se introdu-



ce el factor (1) $\sqrt{-g}$, impuesto por la teoría de transformación de coordenadas (2). Si, pues, reemplazamos el tensor h^{ij} por el

$$\mathfrak{h}^{ij} = \sqrt{-g}\,h^{ij}.$$

$\sum_{ij} h_{ij}\mathfrak{h}^{ij}$ tiene ya sentido físico porque el peso $+2$ de $\sqrt{-g}$ destruye el -2 de h^{ij}. Así, se comprende el porqué de la expresión un tanto complicada que toma la segunda ecuación del campo electromagnético en la teoría general de relatividad.

---

(1) El signo $-$ de g es necesario para que el radical sea real, puesto que dije (nota de la pág. 322) que g es negativo.

(2) En efecto:

$$g' = |g'_{ij}| = \left|\sum_{hk} \frac{\partial x_h}{\partial x'_i}\frac{\partial x_k}{\partial x'_j} g_{hk}\right|,$$

donde las barras verticales significan que se trata del determinante cuyos elementos son del tipo escrito entre ellas. Pero la regla de multiplicación de matrices da

$$\left|\sum_{hk} \frac{\partial x_h}{\partial x'_i}\frac{\partial x_k}{\partial x'_j} g_{hk}\right| = \left|\frac{\partial x_h}{\partial x'_i}\right| \times \left|\frac{\partial x_k}{\partial x'_j}\right| \times |g_{hk}|,$$

o sea

$$g' = \left|\frac{\partial x_h}{\partial x'_i}\right|^2 g.$$

Pero según la teoría del cambio de variables,

$$dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4 = \left|\frac{\partial x_h}{\partial x'_i}\right| dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

de modo que el invariante elemental de dominio será:

$$\sqrt{-g}\; dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$



NOTA II

Curvatura de líneas, superficies y el Universo

1. La noción de curvatura corresponde en el caso de las líneas y superficies a una intuición directa que basta traducir en el lenguaje preciso de la matemática.

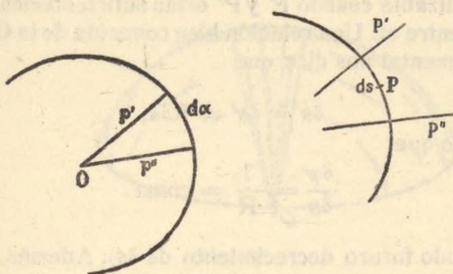


Fig. 29

El caso es sencillo para las líneas. Sea P (fig. 29) un punto alejado de cualquier singularidad, y tomemos un segmento pequeño que le comprende, δs. Por un pun-

to fijo, O, dibujemos dos rectas, p' y p'', paralelas a las normales a la línea en los extremos, P′ y P″, del segmento δs. Estas dos rectas formarán un ángulo que se mide por el arco, $\delta\alpha$, que limitan en la circunferencia de radio unidad y centro O. El límite de la relación $\frac{\delta\alpha}{\delta s}$ cuando los dos puntos P′ y P″ tienden a confundirse con P es un número finito que mide la curvatura en cuestión

$$k = \text{lím.}\ \frac{\delta\alpha}{\delta s}.$$

La exactitud de esta afirmación se reconoce si con centro en O describimos una circunferencia de radio, R, elegido de modo que la porción, $\delta s'$, limitada en ella por p' y p'' tenga una longitud igual a δs, hipótesis siempre realizable cuando P′ y P″ están suficientemente próximos entre sí. Una relación bien conocida de la Geometría elemental nos dice que

$$\delta s = \delta s' = R\delta\alpha,$$

de modo que

$$\frac{\delta\alpha}{\delta s} = \frac{1}{R} = \text{const}.$$

(para todo futuro decrecimiento de δs). Además, podemos agregar que a la circunferencia de radio R se la podrá siempre hacer coincidir con el elemento de línea δs y p', p'' con las normales en P′, P″. Se dice entonces que es osculatriz a la línea en P, y a R se le denomina *radio de curvatura* en dicho punto.

Cuando se trata de una superficie no es tan sencillo encontrar una expresión que traduzca la idea intuitiva



de curvatura. Lo que a primera vista parece más lógico es referirnos a la curvatura de las líneas, considerando las que pueden dibujarse en la superficie y que pasan

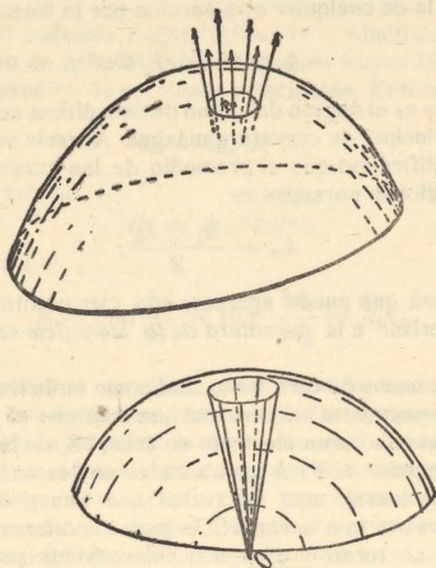


Fig. 30

por P. En particular las intersecciones de aquélla con el haz de planos que pasan por la normal en P, los cuales se designan, por esta razón, *secciones normales* de la superficie. Las curvaturas de estas secciones se hallan comprendidas entre un máximo $k_1 = \frac{1}{R_1}$, y un mínimo

$k_2 = \frac{1}{R_2}$, que corresponden a planos perpendiculares entre sí, cuyas curvaturas, radios y secciones se adjetivan *principales,* porque mediante ellas se puede representar la de cualquier otra sección por la fórmula

$$k = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi,$$

donde φ es el ángulo del plano de esta última con la sección principal de curvatura máxima. Además se reconoce sin dificultad que el promedio de las curvaturas de las secciones normales es

$$k_m = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

magnitud que puede aparecer con ciertos títulos para caracterizar a la *curvatura de la superficie* en el punto P.

Razonemos de otro modo. Así como en la línea tomamos un segmento infinitesimal que contiene el punto P, acotemos ahora un elemento de área, δS, de la superficie alrededor de P. A las normales en los extremos δs corresponderán aquí las rectas que tienen dicha posición respecto a la superficie para los diferentes puntos del contorno, y al arco $\delta \alpha$ interceptado por p' y p'' en la circunferencia de radio unidad y centro O, el casquete esférico $\delta \sigma$ de radio unidad limitado por el cono de generatrices $p_1\ p_2 \ldots$ que parten de un punto arbitrario O y son paralelas a las normales en el contorno de $\delta \sigma$. La analogía podemos seguirla hasta definir la curvatura de la superficie por

$$K = \text{lím.} \frac{\delta \sigma}{\delta S},$$



cuando δs tiende a cero. Gauss ha llamado a K curvatura *total*, y ha establecido con las k_1, k_2 la relación

$$K = k_1 k_2$$

a la cual podemos llegar fácilmente si admitimos que el elemento de área δS es el rectángulo cuyos lados son dos segmentos de secciones principales. Entonces

$$\delta S = \delta s_1 \times \delta s_2$$

y en la esfera

$$d\sigma = d\alpha_1 \times d\alpha_2,$$

de modo que

$$K = \text{lím.}\, \frac{\delta\alpha_1}{\delta s_1} \times \text{lím.}\, \frac{\delta\alpha_2}{\delta s_2} = k_1 k_2.$$

Lo mismo la curvatura media que la total ofrecen ciertos inconvenientes para adoptarlas como expresión de la noción intuitiva de curvatura en las superficies. Comencemos haciendo notar que si nos atenemos a ella sólo existe una superficie cuya curvatura sea nula: el plano, para cuyos puntos todas las k son iguales a cero. Pero lo mismo k_m que K pueden anularse sin que se cumpla esta condición. En cuanto a la primera, basta observar que k_1 y k_2 son de signos contrarios siempre que los centros de curvatura respectivos se hallen a ambos lados de la superficie, y cuando esto ocurre es ciertamente posible que k_m se anule, sin que les pase otro tanto a las k_1 y k_2. Respecto de K, basta que cualquiera de éstas sea cero, circunstancia que se da siempre que la superficie en cuestión sea desarrollable en un plano: tal es el caso de un cono o un cilindro. Por esto Caso-



reti ha propuesto la nueva expresión $\frac{k_1^2 + k_2^2}{2}$ para medir la curvatura superficial.

Sin embargo, desde el punto de vista que aquí nos interesa, a saber, aquella curvatura que el homoide puede conocer sólo por medidas sobre la superficie, la curvatura de Gauss llena las condiciones necesarias. En efecto: cuando se dice que una superficie es desarrollable, quiere afirmarse que una figura dibujada sobre ella puede aplicarse en un plano sin alterar ninguna de sus dimensiones. Así, las relaciones métricas que entre sus elementos existan serán idénticas que para el plano, y, por tanto, obedecerán a la Geometría de Euclides. El homoide no aprecia diferencias que le permitan distinguir una de estas superficies de las otras, realizando medidas sobre figuras trazadas en ellas; la condición $K = 0$ que a todas corresponde tiene, pues, un sentido físico bien definido. Otro tanto puede decirse de cualquier grupo de superficies que respondan al mismo valor de $K \neq 0$, o sea de superficies mutuamente adaptables: los homoides que las habiten serán incapaces de distinguir entre

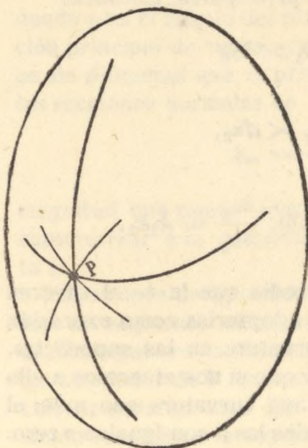


Fig. 31



ellas utilizando las relaciones métricas de sus figuras.

En cambio, no existe confusión posible cuando la curvatura de Gauss tiene valores diferentes; la Geometría de Euclides es aplicable sólo cuando $K = 0$. Cuando $K > 0$ (fig. 31), de modo que k_1 y k_2 son de igual signo, la superficie es del tipo de un elipsoide, o más sencillamente de una esfera, de modo que la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que π, y la relación de la circunferencia al diámetro menor que esta constante: tal sería el caso de un mundo superficial en que existiese una masa puntual que crea un campo gravitatorio. Si, por el contrario, k_1 y k_2 tienen signos opuestos (figura 32), $K > 0$ y la geometría es tal que aquella suma de ángulos es menor que π, y la indicada relación de longitudes de la circunferencia y su diámetro mayor que ella. Recordaré que este es precisamente el caso del disco en rotación de que se habla en el § 55.

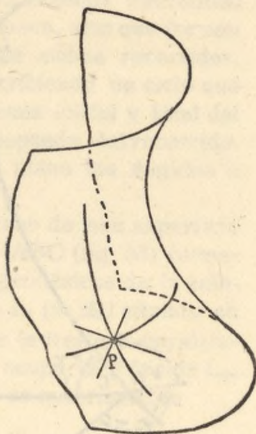


Fig. 32

2. Se puede derivar directamente del postulado de las paralelas de Euclides una propiedad que permitirá al homoide distinguir si la superficie que habita es o no plana: satisface o no a los teoremas de la geometría euclídea. Definida la recta como la mínima distancia entre dos puntos, equivale a asignar dicho nombre a la

geodésica que les une, sin preocuparnos de la forma que a la misma pueda asignar un ser capaz de percibir lo que queda fuera de la superficie que nos ocupa. Así, la generalización inmediata del paralelismo para dos segmentos infinitesimales en una superficie cualquiera

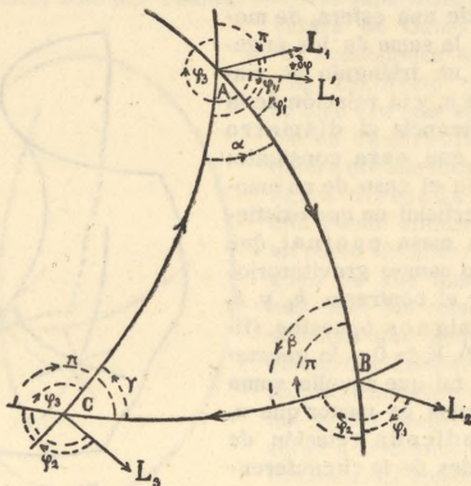


Fig. 33

se obtendrá afirmando que cumplen con dicha condición aquellos que formen ángulos iguales con la geodésica que une los lugares en que se encuentran. En el plano la geodésica es la recta propiamente dicha, y se cae en el postulado clásico.

Una vez definido el paralelismo, podemos hablar del transporte de un segmento paralelamente a sí mismo,

sea cual fuere el recorrido que un punto determinado de aquél (su origen, por ejemplo) haya de efectuar: queremos decir que dos posiciones del segmento, P y P+*d*P, infinitamente próximas forman ángulos iguales con la geodésica que une dichos puntos. Esto conduce a que si un mismo segmento se transporta de P a P', lugares a distancia finita, siguiendo caminos diferentes, sus posiciones en P' no se superponen, sino que forman entre sí ángulos dependientes de ambos recorridos. También podemos decir que describiendo un ciclo que parta y termine en P, las posiciones inicial y final del segmento forman un ángulo que depende del recorrido. Veremos que únicamente para el plano los ángulos a que me he referido son nulos.

Comencemos considerando el caso de una superficie esférica, y en ella un triángunlo ABC (fig. 33) formado por arcos de círculo máximo (geodésicas de la esfera). Supongamos que el segmento L_1 (= *ds)* situado eu A forma el ángulo φ_1 con AB y se le traslada paralelamente asimismo hasta B, donde ocupa la posición L_2. El ángulo que aquí forma con BC es notoriamente

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi - \beta,$$

conservando el cual le trasladaremos hasta que en C ocupa la posición L_3. En dicho punto formará con CA el ángulo

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \pi - \gamma,$$

y al volver a A después de un transporte paralelo no coincidirá con L_1, sino que ocupa la posición L' inclinado respecto de AB el ángulo

$$\varphi'_1 = \varphi_3 + \pi - \alpha = \varphi_1 + \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$



En definitiva, L_1 y L'_1 forman el ángulo

$$\delta\varphi = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

que en virtud de las propiedades de los triángulos esféricos puede también escribirse en su forma

$$\delta\varphi = \frac{A}{R^2} = KS,$$

donde S representa el área del triángulo, y R el radio de la esfera.

Si en vez del triángulo esférico dibujamos en la misma superficie una curva cerrada cualquiera, cada uno de sus elementos se puede confundir con una geodésica que llamaremos tangente a la curva, pues corresponde exactamente con el caso de las tangentes ordinarias para las curvas planas. Entonces, trazando desde un punto interior arcos de circulo máximo que terminen en puntos de la curva en cuestión, habremos descompuesto el área envuelta por ella en triángulos esféricos. Por otra parte, transportar paralelamente asimismo el segmento L a lo largo de toda la curva, equivale a hacer el mismo transporte sucesivamente sobre aquellos triángulos, siempre en el mismo sentido, pues cada uno de los arcos agregados se recorrerá dos veces en sentidos opuestos. Entonces el ángulo final se obtendrá por suma de los parciales, con lo cual llegaremos a la misma expresión anterior, aunque siendo S el área que encierra la nueva curva.

Cuando en vez de una superficie esférica consideramos cualquiera otra, la curvatura será en general variable con el punto a que nos refiramos.

Además, en general tampoco se verificará que los dos radios de curvatura principales sean iguales, como pasa



en la esfera: salvo puntos excepcionales, $K = k_1 k_2$. Pero también aquí el ángulo formado por las posiciones inicial y final de L, cuando el contorno recorrido envuelve un elemento de superficie *ds*, se expresa mediante

$$\delta\varphi = K ds.$$

Para un área finita hemos de realizar la descomposición en elementos infinitamente pequeños y

$$\delta\varphi = \int K ds.$$

3. Pasemos ahora a la variedad de cuatro dimensiones que constituye nuestro Universo. Tampoco ahora puede afirmarse *a priori* que realizada la misma operación con L coinciden las posiciones extremas. En general formarán ángulo entre sí; pero este ángulo no basta para caracterizar el Universo, puesto que existe indeterminación en cuanto a la variedad de dos dimensiones en que dicho ángulo se encuentra. Pero en el punto P, envuelto por el indicado contorno, podemos elegir como ejes de referencia cuatro diámetros conjugados (§ 50) de las indicatrices correspondientes a su entorno infinitamente pequeño, los cuales se prolongarán más allá, según líneas geodésicas. Cada dos de éstas definen una superficie (variedad de dos dimensiones) que pasa por P, y a la cual es perfectamente aplicable cuanto he dicho anteriormente. Por consiguiente, podemos definir de este modo su curvatura K_{ij}, y su valor total sería, por definición,

$$K = \sum_{ij} K_{ij}$$

Pero resulta preferible reemplazar K por otras magnitudes de que paso a ocuparme.



En vez de los ángulos de las posiciones inicial y final de L, fijemos la atención en los cambios que experimentan los componentes de L por efecto del corrimiento paralelo. Por métodos de cálculo que rebasan los límites de este libro, se obtiene

$$\delta L_k = \sum_{ij}\Big[\sum_{\varepsilon} B^{\varepsilon}_{kij} L_{\varepsilon}\Big] ds^{ij}, \qquad (1)$$

donde ds^{ij} representa el área limitada por dz_i, dz_j y B^{ε}_{kij} es un símbolo de las complicadas funciones

$$B^{\varepsilon}_{kij} = \sum_{\alpha}\left(\Gamma^{\alpha}_{kj}\Gamma^{\varepsilon}_{\alpha i} - \Gamma^{\alpha}_{ki}\Gamma^{\varepsilon}_{\alpha j}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\Gamma^{\varepsilon}_{kj} - \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^{\varepsilon}_{ki}.$$

Todos los signos Σ se refieren a los términos que pueden obtenerse dando a las letras que figuran debajo de cada uno los valores 1, 2, 3, 4.

Es evidente la complejidad de las expresiones precedentes. Cada una de las B^{ε}_{kij} contiene aparentemente 10 términos; pero ha de tenerse presente que un Γ^{α}_{kj} incluye 12 sumandos. Además, existen 20 de estas funciones totalmente distintas, que se denominan componentes del tensor de Riemann-Christoffel. En cuanto a las ecuaciones que dan δL_k, el signo $\sum_{ij}$ corresponde a 6 sumandos, que a su vez contienen 4 en virtud del signo $\sum_{\varepsilon}$: en total 24 términos en las B^{ε}_{kij}. Felizmente, no existe en ningún momento necesidad de ejecutar los cálculos a que vengo refiriéndome.

Si el Universo fuese euclidiano, es notorio que los δL_k son todos nulos, para lo cual, atendidas las (1), es



necesario y suficiente que se cumplan las 20 condiciones

$$B^{\varepsilon}_{kij} = 0. \qquad (2)$$

Naturalmente, esto quiere decir que entre el tensor de Riemann-Christoffel y la curvatura K, que también es nula para este caso, existe una relación estrecha, pero no identidad, puesto que K es un invariante.

Dicha relación se establece del modo siguiente: partiendo del tensor de Riemann Christoffel se pueden formar las 10 funciones

$$G_{ij} = \sum_{\varepsilon} B^{\varepsilon}_{\varepsilon ij},$$

que coinciden con las (58, 2) del texto, las cuales se anularán si se cumplen las condiciones (2); pero pueden conservarse nulas aunque no lo sean todas las B^{ε}_{kij}. Este es el caso que puede darse fuera de la materia en un campo gravitatorio.

El nuevo tensor de componentes G_{ij} engendra un invariante según la ecuación

$$G = \sum_{ij} g^{ij} G_{ij},$$

donde las g^{ij} han sido ya definidas en el § 50. Este invariante está ligado a K por la relación numérica sencilla

$$G = -2K$$

Por eso se ha llamado a G *invariante de curvatura*, y al tensor de las G_{ij} *tensor de curvatura*.

Es interesante llamar la atención sobre el hecho de que la anulación de K no supone que el Universo sea



plano, sino que para ello es menester el cumplimiento de las (2). En efecto: ya dije que las G_{ij} pueden ser todas nulas sin que lo sea el tensor de Riemann-Christoffel, y dicho se está que en estas condiciones $G = 0$. Agregaré que aun esta anulación puede ocurrir sin que el tensor de curvatura se anule. En definitiva: Universo plano y Universo de curvatura K nula no son términos equivalentes, circunstancia que Eddington expresa diciendo que aquellos para los cuales $B^{\varepsilon}_{kij} \neq 0$, pero $G_{ij} = G = K = 0$, tienen una curvatura de primer grado; los que satisfacen a las relaciones $B^{\varepsilon}_{kij} \neq 0$, $G_{ij} \neq 0$ y $G = K = 0$ poseen curvatura de segundo grado, y aquellos para los cuales todas estas magnitudes son diferentes de cero, totalmente curvos.

FIN



BIBLIOGRAFÍA

I. Obras filosóficas y de divulgación

A. Einstein. *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie.*

Traducciones inglesa, francesa, italiana y española (por Lorente de No).

M. Schlick. *Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik.*

Traducciones inglesa y española (por M. G. Morente).

H. Reichenbach. *Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori.*

E. Borel. *L'Espace et le Temps.*

G. Mie. *Die Einsteinsche Gravitationstheorie.*

Traducción francesa.

M. Born. *Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen.*

Traducción española de M. G. Morente.

E. Freundlich. *Die Grundlagen der Einsteinsche Gravitations theorie.*

Traducciones inglesa y española (por J. M. Plans).

L. G. Du Pasquier. *Le Principe de la Relativité et les théories de Einstein.*



E. Cunningham. *Relativity and the Electron Theory.*
A. S. Eddington. *Space, Times and Gravitation.*
Traducciones francesa y española (por J. M. Plans).
A. N. Whitehead. *The Principes of Natural Knowledge.*
» *The Concept of Nature.*
A. A. Robb. *The absolute relations of Times and Space.*

II. Relatividad restringida

Lorentz. *The Theory of Electrons.*
M. B. Weinstein. *Die Physik der bewegten Materie und die Relativitätstheorie.*
J. M. Plans. *Mecánica relativista.*
R. C. Tolman. *The Theory of the Relativity of Motion.*
E. Cunningham. *The Principe of the Relativity.*
Silberstein. *The Theory of Relativity.*
M. v. Laue. *Die Relativitätstheorie* (tomo I).
A. A. Robb. *Theory of Time and Space.*

III. Relatividad general

G. Juvet. *Introduction au calcul tensoriel et au calcul differentiel absolu.*
A. Einstein. *Die Grundlage der allgemeine Relativitätstheorie.*
A. Einstein. *Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie.* Traducción inglesa.
A. S. Eddington. *Report on the Relativity Theory of Gravitation.*
A. S. Eddington. Segunda parte de la traducción francesa de *Space, Times and Gravitation.*



A. KOPFF. *Grundzüge der Einsteinschen Relativitätstheorie.*
Traducciones inglesa e italiana.
R. MARCOLONGO. *Relatività.*
J. BECQUEREL. *Le Principe de Relativité et la Theorie de la Gravitation.*
M. v. LAUE. *Die Relativitätstheorie* (tomo II).
H. WEYL. *Raum-Zeit-Materie.*
Traducciones francesa e inglesa.
W. PAULI. *Relativitätstheorie.*
A. N. WHITEHEAD. *The Principe of Relativity with Applications to Physical Science.*
B. RIEMANN. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.*
Anotada por H. Weyl.
A. EINSTEIN. *Geometrie und Erfahrung.*
» *Æther und Relativitätstheorie.*
Traducciones inglesa, francesa e italiana.

Enero 1923.



INDICE



PUBLICACIONES DE LA RESIDENCIA DE ESTUDIANTES

ESTAS publicaciones responden a la necesidad de buscar una expresión de la actividad espiritual que en la RESIDENCIA y en torno de ella se ha ido desenvolviendo. Los varios modos en que va cuajando esta actividad estarán representados en diferentes series de libros. No se trata, pues, tan sólo de dar publicidad a los trabajos de los Residentes, primeros frutos de su formación científica, sino de recoger también otras producciones que han nacido al contacto de la RESIDENCIA con el ambiente ideal exterior. La obra de la RESIDENCIA ha sabido atraer la atención y el apoyo moral de literatos, científicos y políticos que trabajan unidos a su lado, como si se tratase de una obra propia; y este núcleo formado en torno de la RESIDENCIA se ha dispuesto con devoción y con entusiasmo a sembrar en ella y desde ella, en la juventud española, los ideales de la Patria futura. En fin, la continuidad de la labor educacional de la RESIDENCIA la lleva a perpetuar en sus publicaciones momentos ejemplares de la cultura universal y de la vida nacional, para todo lo cual encontrará cauce en las actuales series y en otras nuevas, que a su tiempo saldrán a luz.



LIBROS PUBLICADOS

Serie I. Cuadernos de trabajo:

Con estos cuadernos de investigación quisiera la Residencia contribuir a la labor científica española.

1. El sacrificio de la Misa, por Gonzalo de Berceo. Edición de *Antonio G. Solalinde.* 1,50 ptas.
2. Constituciones Baiulie Mirabeti (1328). Edición de *Galo Sánchez.* 1,50 ptas.
3. ¿Qué es la electricidad?, por *Blas Cabrera.* 3,50 ptas.
4. La base trófica de la inteligencia, por *R. Turró.* 3 ptas.
5. La imagen óptica; telescopio y microscopio, por *Joaquín M.ª Castellarnau.* 3,50 ptas.
6. Las fuentes del Derecho civil español, por *Felipe Clemente de Diego.* 7,50 ptas.
7. Principio de relatividad, por *Blas Cabrera.* 7,50 ptas.

Serie II. Ensayos:

Componen esta serie trabajos originales que, aun versando sobre temas concretos de arte, historia, ética, literatura, etcétera, tienden a expresar una ideología de amplio interés en forma cálida y personal.

1. Meditaciones del Quijote, Meditación preliminar y Meditación primera, por *J. Ortega y Gasset.* 3 ptas.
2. Al margen de los clásicos, por *Azorín.* 3,50 ptas.
3. El protectorado francés en Marruecos y sus enseñanzas para la acción española, por *Manuel González Hontoria.* 4 ptas.
4. El licenciado Vidriera, visto por *Azorín.* 3,50 ptas.
5. Ensayos. Tomo I, por *M. de Unamuno.* 3,50 ptas.
6. Un pueblecito, por *Azorín.* 3,50 ptas.
7. Ensayos. Tomo II, por *M. de Unamuno.* 3,50 ptas.
8. La edad heroica, por *Luis de Zulueta.* 2,50 ptas.
9. Ensayos. Tomo III, por *M. de Unamuno.* 3,50 ptas.
10. La filosofía de Henri Bergson, por *Manuel G. Morente.* 3 ptas.



11. Ensayos. Tomo iv, por *M. de Unamuno.* 3,50 ptas.
12. El sentimiento de la riqueza en Castilla, por *Pedro Corominas.* 3,50 ptas.
13. Ensayos. Tomo v, por *M. de Unamuno.* 3,50 ptas.
14. Ensayos. Tomo vi, por *M. de Unamuno.* 3,50 ptas.
15. Ensayos. Tomo vii, por *M. de Unamuno.* 3,50 ptas.

Serie III. Biografías:

Para promover viriles entusiasmos, nada como las vidas heroicas de hombres ilustres, exaltadas por espíritus gemelos. Esta serie consta de ejemplares biografías, cuya traducción se ha confiado a escritores competentes.

1. Vida de Beethoven, por *Romain Kolland.* Traducción de *Juan Ramón Jiménez.* 3,50 ptas.

Serie IV. Varia:

La Residencia se propone perpetuar, con esta serie, la eficacia de toda manifestación espiritual (lecturas, jiras, conferencias, conmemoraciones), que impulse la nueva España hacia un ideal puro, abierto y definido.

1. De la amistad y del diálogo. Lectura dada en la Residencia de Estudiantes por *Eugenio d'Ors.* (2.ª edición.) 2 ptas.
2. Jean Sébastien Bach, auteur comique. Conférence faite à la Residencia de Estudiantes par *M. André Pirro.* 1,50 ptas.
3. Aprendizaje y heroísmo. Lectura dada en la Residencia de Estudiantes por *Eugenio d'Ors.* 2 ptas.
4. Fiesta de Aranjuez en honor de Azorín. Discursos, poesías y cartas. 1,50 ptas.
5. Disciplina y rebeldía. Lectura dada en la Residencia de Estudiantes por *Federico de Onís.* 1 pta.
6. Porvenir de la literatura después de la guerra. Lectura dada en la Residencia de Estudiantes por la *Condesa de Pardo Bazán.* 1 pta.
7. Poesías completas de Antonio Machado, en un volumen. 4 ptas.
8. Grandeza y servidumbre de la inteligencia. Lectura dada en la Residencia de Estudiantes por *Eugenio d'Ors.* 2,50 ptas.
9. La crisis económico-financiera y la conferencia de Génova. Conferencia dada en la Residencia de Estudiantes por *Francisco de A. Cambó.* 2,50 ptas.



Serie III. — Biografías.

Serie IV. — Varia.



PUBLICACIONES DE LA
RESIDENCIA DE
ESTUDIANTES. MADRID

ADMINISTRACIÓN:
CALLE DEL PINAR

7,50 PTAS.

